Parte 2

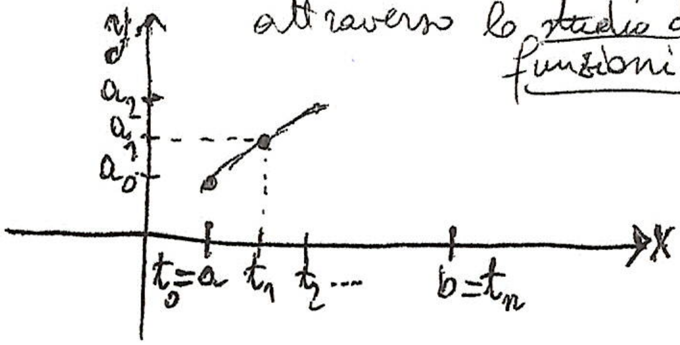
Lo studio delle funzioni (limiti, derivate, continuità ... e non solo!)

INDICE

Presentazione delle funzioni e successioni pag. 1
Limiti (di funzioni) pag. 9
Limiti di successioni pag. 11
Algebra dei limiti pag. 13
Esempi pag. 16
Primi esercizi sui limiti pag. 20
Continuità pag. 30
Derivata pag. 33
Derivabilità e continuità pag. 37
Esempi di derivate e regole pag. 39
Teorema de l'Hôpital pag. 47
Studio di funzione pag. 50
Esempio di studio di funzione pag. 59
Iniettività e suriettività pag. 67
Valore assoluto pag. 73
Teorema dei valori intermedi pag. 74
Radice quadrata pag. 75
Grafico della funzione inversa pag. 77
Radice cubica pag. 79
Potenze ed esponenziale pag. 82
Logaritmi ed esponenziale pag. 89
[Limiti notevoli su esponenziale e logaritmo pag. 93]
2° esempio di studio di funzione pag. 102
Funzioni composte pag. 108
Teorema di derivazione delle funzioni composte e applicazioni pag. 111
Limiti notevoli ed esercizi pag. 115
3°, 4°, 5° esempio di studio di funzione pag. 120
Funzioni trigonometriche pag. 130
Funzioni trigonometriche inverse pag. 146
Limiti notevoli di trigonometria pag. 157
Derivate in trigonometria pag. 161
Esercizi su limiti in trigonometria pag. 165
Funzioni trigonometriche come studio di funzione pag. 166
Derivazione delle funzioni inverse pag. 179
Arcotangente ed arcocotangente come studio di funzione pag. 184
Limiti notevoli su tangente e arcotangente pag. 186
Esercizio sulla funzione inversa pag. 187
PARABOLA: COLLEGAMENTI PROFONDI ED ESERCIZI, e parabola come studio di funzione pag. 189

(ultima pagina: p. 199)

Cerchiamo di descrivere un FENOMENO che varia nel tempo, ad esempio la <u>temperatura</u>, o l'<u>andamento dei prezzi</u>, oppure la <u>consistenza di una popolazione</u>. Noi ci occuperemo dello studio dei fenomeni attraverso lo <u>studio delle funzioni</u>.



TEMPO	VALORE OSSERVATO
t_0	a_0
t_1	a_1
t_2	a_2
....	....
t_n	a_n

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti.
Ad esempio, all'istante t_1 corrisponde IL valore a_1 (quindi <u>UN SOLO VALORE</u>: non è possibile che all'istante t_1 corrispondano due o più valori, perché il valore osservato nello studio del fenomeno in quell'istante è <u>lui</u> e non un altro). Se f sarà la funzione che esprime il fenomeno che stiamo studiando, allora sarà: $\boxed{f(t_1) = a_1}$ (e nessun altro numero).

<u>Esempio</u>: la temperatura osservata in un certo luogo in diverse ore della giornata

°C = gradi Celsius

	ORA	VALORE OSSERVATO IN °C	
t_0 = ore 0 (1/2 notte)	0	2	$a_0 = 2$
t_1 = ore 1	1	1	$a_1 = 1$
t_2 = ore 2	2	1	$a_2 = 1$
t_3 = ore 3	3	2	$a_3 = 2$
t_4 = ore 4	4	3	$a_4 = 3$
t_5 = ore 5	5	5	$a_5 = 5$
t_6 = ore 6	6	7	$a_6 = 7$

In certi tipi di fenomeni, è opportuno considerare, ad esempio, un intervallo <u>non</u> necessariamente limitato e "ingrandire" l'intervallo $[a, b]$: per esempio considerare b molto grande ($b =$ un miliardo $= 1'000'000'000 = 10^9$; un miliardo di miliardi ....) cioè b che "va verso $+\infty$" o "tende a $+\infty$" (per esempio, quando si tratta di

PREVEDERE UN FUTURO LONTANO)

oppure prendere a negativo, $a = -1$, e poi $a = -100$, $a = -10^9$, ecc...., cioè a che "va verso $-\infty$" oppure "tende a $-\infty$" (per esempio, quando ~~si~~ si tratta di

RICOSTRUIRE UN PASSATO LONTANO)

Quindi, ad esempio, considerare un insieme di istanti temporali $\{t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots\}$ con n molto grande, ..., quando si tratta, per esempio, di prevedere la temperatura in un preciso punto tra 10'000 anni allo stesso giorno e alla stessa ora, ... oppure un insieme di istanti temporali $\{\dots, t_{-n-1}, t_{-n}, \dots, t_{-1}, t_0\}$ quando si tratta di ricostruire la temperatura di un preciso punto come era 10'000 anni fa.

L' insieme $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ si identifica con l' insieme dei numeri naturali o interi positivi

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}}$$

mentre l' insieme $\{\dots t_{-n-1}, t_{-n}, \dots, t_{-1}, t_0, t_1, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots\}$ si identifica con l' insieme dei numeri INTERI RELATIVI

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{Z} &= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} = \\ &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \end{aligned}}$$

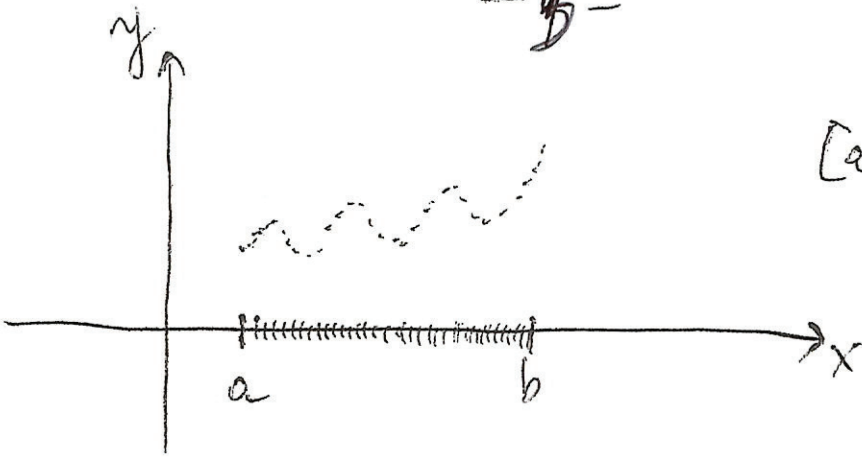
Quindi, quando si studia un fenomeno in $\mathbb{N}$, ciò significa fare (anche) la previsione nel futuro; quando si studia il fenomeno in $\mathbb{Z}$, ciò significa fare anche la previsione nel futuro e la ricostruzione nel passato.

L' insieme dei valori osservati in corrispondenza con $\mathbb{N}$ (cioè $\{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$) oppure l'insieme dei valori osservati in corrispondenza con $\mathbb{Z}$ (cioè $\{a_0, a_1, a_{-1}, \dots, a_n, a_{-n}, \dots\} = \{\dots, a_{-n-1}, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots\}$ si chiama $\boxed{\text{SUCCESSIONE}}$, e si indica con i simboli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $(a_n)_n$.

Più in generale:

<u>Definizione</u>: Una <u>successione</u> $(a_n)_n$ è una legge che, ad ogni elemento $n \in \mathbb{N}$, oppure $n \in \mathbb{Z}$, oppure $n \in P$, ove P è un sottoinsieme <u>infinito</u> di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ (per esempio P può essere l'insieme dei numeri pari, o l'insieme dei numeri dispari ...) associa un $\boxed{\text{unico valore}}$ a_n. Il valore a_n può essere scritto anche $f(n)$, ove f sarà la legge che descrive il fenomeno che si studia. Diremo che una successione è (anche) una $\boxed{\text{FUNZIONE}}$ (o APPLICAZIONE) $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$, ove P è un sottinsieme <u>infinito</u> di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ ed $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri <u>reali</u>

Ora, se vogliamo studiare il fenomeno che stiamo analizzando con SEMPRE MAGGIORE PRECISIONE, consideriamo intervalli di tempo $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ tali che le quantità $t_1-t_0, t_2-t_1, t_3-t_2, \ldots$ sono SEMPRE PIÙ PICCOLE. Alla fine, il fenomeno lo possiamo studiare in <u>tutti</u> i numeri reali appartenenti all'intervallo $[a,b]$ oppure a tutta la semiretta $[a,+\infty[$ oppure a tutta la semiretta $]-\infty,b]$ oppure a <u>tutto</u> $\mathbb{R}$



$[a,b]$ lo si divide in n parti

Sull' asse x, ci metteremo gli istanti temporali (che indicheremo con t o con x); sull' asse y, ci metteremo i valori osservati (che chiameremo $f(t)$ oppure $f(x)$: f sarà la <u>legge</u> del nostro fenomeno, cioè la nostra <u>FUNZIONE.</u>

N.B.: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, (intervallo CHIUSO)

$]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, (intervallo APERTO)

$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$,

$]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, (intervallo SEMIAPERTO o SEMICHIUSO)

$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$, (semiretta destra CHIUSA),

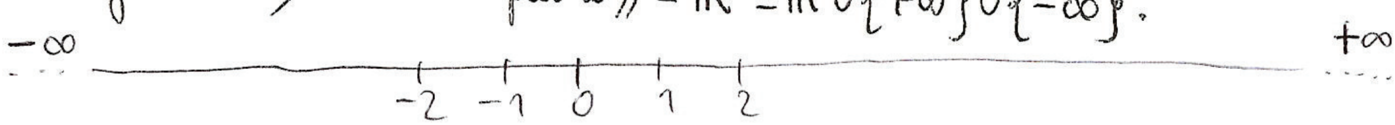
$]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. (semiretta destra APERTA)

$]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$, (semiretta sinistra CHIUSA)

$]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$, (semiretta sinistra APERTA)

$]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$ = tutto $\mathbb{R}$

Per definizione, "erre ampliato" $= \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$.



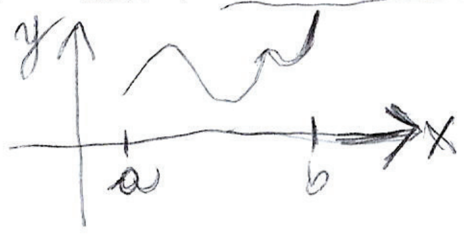
Dunque, presentiamo il concetto di funzione.

<u>Definizione</u>: Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, possibilmente (ma non sempre!) un intervallo, o una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$ (un insieme così fatto lo diremo un insieme "di tipo I", oppure "non bucato", un insieme "connesso costituito da infiniti punti"), si chiama <u>FUNZIONE</u> o <u>APPLICAZIONE</u> $f: A \to \mathbb{R}$ una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa UNO E UN SOLO ELEMENTO di $\mathbb{R}$, detto $f(x)$.

Quindi una SUCCESSIONE è una particolare funzione, ove A è un sottoinsieme <u>infinito</u> di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$. Più in generale, se A e B sono due insiemi non vuoti qualsiasi, si chiama FUNZIONE o APPLICAZIONE $f: A \longrightarrow B$ una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa <u>UNO</u> e <u>UN SOLO</u> elemento di B, detto $f(x)$.

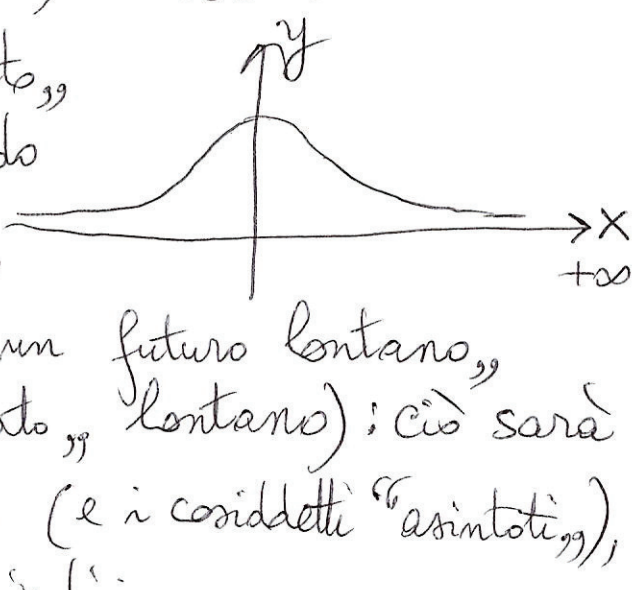
L'insieme A si dice <u>DOMINIO</u> di f, o <u>INSIEME DI DEFINIZIONE</u>, o <u>CAMPO DI ESISTENZA</u> di f, mentre l'insieme B si dice <u>INSIEME DEI VALORI</u> di f.

Lo scopo di questo materiale è quello di <u>descrivere il fenomeno che si sta studiando</u> attraverso <u>lo studio di una funzione</u>, in cui si studiano diverse proprietà <u>qualitative</u>: che segno assume? dove cresce? dove decresce? con quale rapidità cresce o decresce? qual è il suo comportamento "all'infinito" (ammesso che abbia senso parlarne)? Ha qualche comportamento "un po' particolare" nella vicinanza di alcuni punti? A ciò risponde lo <u>studio di funzione</u>, che è il nostro scopo per descrivere i fenomeni analizzati: quindi la mèta è: FARE LO STUDIO DI FUNZIONE E FARE IL <u>GRAFICO</u> DELLA FUNZIONE STUDIATA, perché IL GRAFICO AIUTA MOLTISSIMO A CAPIRE CERTI <u>COMPORTAMENTI</u> DELLA FUNZIONE.



In particolare, ci interessano la crescenza o la decrescenza della nostra funzione (che saranno studiate attraverso la DERIVATA) e la convessità ($\cup$) o concavità ($\cap$) della nostra funzione (che saranno studiate attraverso la DERIVATA SECONDA, cioè la DERIVATA DELLA DERIVATA, come vedremo più avanti).

Inoltre, per alcune funzioni, sarà esaminato il comportamento in prossimità di alcuni punti "particolari" e (se ha senso) il cosiddetto "comportamento all'infinito" (che si collega in modo profondo con quello che abbiamo detto a proposito di "prevedere un futuro lontano" oppure "ricostruire un passato lontano"); ciò sarà fatto attraverso i LIMITI (e i cosiddetti "asintoti"), che vedremo tra breve. Quindi:



LIMITI

DERIVATE

STUDIO DI FUNZIONE

GRAFICO

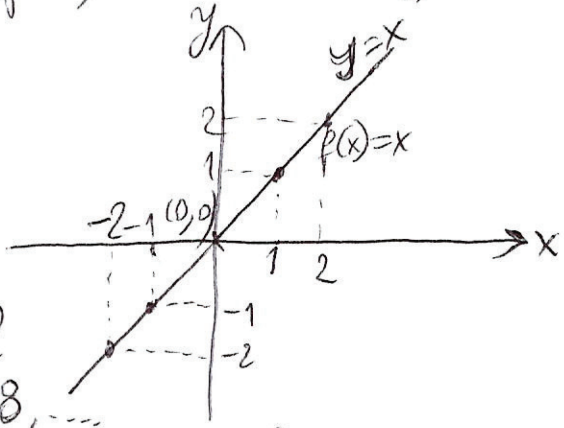
... e chi più ne ha più ne metta!...

ESEMPI DI FUNZIONI

Cominciamo con esempi semplici, "elementari".

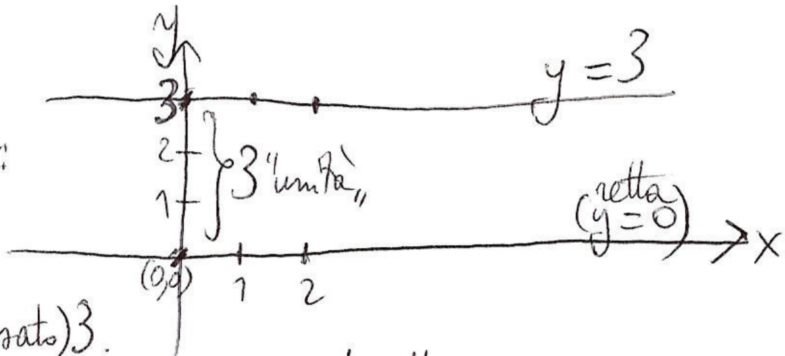
Consideriamo $f(x)=x$:

è quella funzione che ad ogni numero reale x associa se stesso (cioè lo stesso x) (FUNZIONE IDENTITÀ)



Per esempio $f(0)=0$ $f(1)=1$ $f(2)=2$ $f(-1)=-1$ $f(-2)=-2$, $f(1{,}28)=1{,}28$, ...

Si può vedere che il grafico di questa funzione è la retta $y=x$, che è la bisettrice del primo e del terzo quadrante.



Adesso consideriamo $f(x)=3$:

è quella funzione che ad ogni numero reale x associa sempre il numero (fissato) 3.

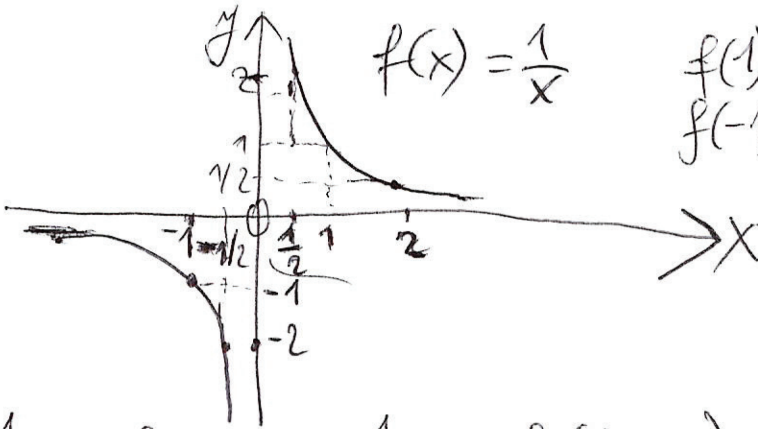
Per esempio $f(0)=3$, $f(1)=3$, $f(2)=3$. Si tratta di una funzione <u>costante</u>, perché assume sempre lo stesso valore 3.

Si può vedere che il grafico di questa funzione è la retta $y=3$, che è una retta orizzontale e che "dista" 3 "unità" dall'asse delle x.

Se fosse stata la funzione costante $f(x)=0$, cioè quella funzione che ad ogni numero reale x associa sempre il numero 0, allora il grafico corrispondente sarebbe stato l'asse x, cioè la retta orizzontale $y=0$.

LIMITI

Consideriamo ora la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$.
Siccome non ha senso dividere per zero, allora il campo di esistenza, o dominio, o insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$ tranne il punto 0: questo insieme lo indichiamo con $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, oppure con $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ (0 escluso).



$f(1) = 1$ $f(2) = \frac{1}{2}$ $f(\frac{1}{2}) = 2$
$f(-1) = -1$ $f(-2) = -\frac{1}{2}$
$f(-\frac{1}{2}) = -2, \ldots$

$f(10) = \frac{1}{10}$, $f(100) = \frac{1}{100}$, $f(1000) = \frac{1}{1000}$, ...

Quando x è molto grande, cioè molto vicino a $+\infty$, allora $f(x) = \frac{1}{x}$ è molto vicino a 0 (pur non essendo mai raggiunto)

In linguaggio matematico

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

(n.b.: il concetto di limite viene dato solo in modo "intuitivo")

Inoltre
$f(-10) = -\frac{1}{10}$, $f(-100) = -\frac{1}{100}$, $f(-1000) = -\frac{1}{1000}$
Quindi, quando x è molto vicino a $-\infty$, allora $\frac{1}{x}$ è molto vicino a 0

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0}$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{\frac{1}{10}} = \frac{10}{1} = 10$

$f\left(\frac{1}{100}\right) = 100, \; f\left(\frac{1}{1000}\right) = 1000, \ldots$

Quando x è molto vicino a 0 ma sta a destra del punto 0 (cioè x è positivo), allora f(x) è molto vicino a $+\infty$.

Si scrive $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}$ e si dice "limite destro per x che tende a zero" oppure "limite per x che tende a zero da destra". Inoltre

$f\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\frac{1}{10}} = -\frac{10}{1} = -10$

$f\left(-\frac{1}{100}\right) = -100, \; f\left(-\frac{1}{1000}\right) = -1000, \ldots$

Quando x è molto vicino a 0 ma sta a sinistra del punto 0 (cioè x è negativo), allora f(x) è molto vicino a $-\infty$. Si scrive

$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}$ e si dice "limite sinistro per x che tende a 0" oppure "limite per x che tende a 0 da sinistra".

ATTENZIONE! Si ha che il limite globale esiste (finito o $\pm\infty$) se e solo se i due corrispondenti limiti destro e sinistro SONO UGUALI, e in tal caso il valore del limite globale sarà il valore comune. Quindi, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste, perché i rispettivi limiti destro e sinistro sono diversi.

N.B.: IL LIMITE, SE ESISTE, È UNICO (Unicità del limite) (senza dimostrazione)

11

LIMITI DI SUCCESSIONI

Visto che le successioni sono particolari funzioni (funzioni definite in un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ o di $\mathbb{Z}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}=\{0,1,-1,2,-2,\ldots\}$), allora tutto ciò che vale per i limiti di funzioni vale anche per i limiti di successioni. Facciamo ora un esempio.
La successione dei numeri pari $a_n = 2n$ è la restrizione ad $\mathbb{N}$ della funzione $2x$, definita su tutto $\mathbb{R}$.

Notiamo che, se il limite di una funzione (al tendere di x ad x_0) è l, allora <u>tutte</u> le restrizioni di questa funzione hanno limite l (purché ci si possa avvicinare ad x_0 rimanendo nell'insieme in cui è definita la restrizione). Per esempio, si può dedurre che $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$ da $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ (perché ci si può avvicinare a $+\infty$ rimanendo nell'insieme $\mathbb{N}$).

Quindi, se ci sono (almeno) due restrizioni aventi limiti diversi, il limite globale <u>non esiste</u>.
Per esempio, abbiamo visto che il limite destro $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$, mentre il limite sinistro $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$, pertanto il limite globale $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}$ NON ESISTE.

Come altro esempio, consideriamo la successione $a_n = (-1)^n$. Si ha: $a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

$[(-1)^0 = 1 \quad (-1)^1 = -1 \quad (-1)^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 \quad (-1)^3 = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = 1\cdot(-1) = -1$ ecc....]

Pertanto, $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ pari}}} a_n = 1$, mentre $\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n \text{ dispari}}} a_n = -1$.

Perciò, $\lim_{n\to+\infty} a_n$ non esiste.

Però, vediamo che $\boxed{\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0}$.

Come lo proviamo?

Innanzi tutto, osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, perché, come visto, si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, ed inoltre $b_n = \frac{1}{n}$ è la restrizione ad $\mathbb{N}$ della funzione $\frac{1}{x}$.

Inoltre osserviamo che, nonostante il limite $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n$ non esista, la successione $(-1)^n$ è limitata: infatti questa successione assume valori compresi fra 1 e -1; anzi addirittura assume <u>solo</u> i valori 1 e -1.

Allora siamo nel caso $\boxed{0 \cdot \text{funzione limitata} = 0}$ (<u>lo prendiamo per buono</u>) <u>che ci dà limite 0</u>. Quindi, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0.$$

ALGEBRA DEI LIMITI

A questo punto ci domandiamo:
come si calcolano i limiti?

Considereremo diversi casi, diversi tipi di funzioni per cui calcolare i limiti: naturalmente non consideremo solo funzioni del tipo $x, x^2, x^3, \dots, x^n, \frac{1}{x}, \dots$ considereremo anche rapporti di polinomi (per esempio, $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+18}$ e simili...), dove si applicano in modo abbastanza "naturale" le regole che enunceremo tra breve, e inoltre vedremo anche alcune funzioni che non sono necessariamente di questo tipo, e per "trattare" le varie funzioni che vedremo, introdurremo il concetto di CONTINUITÀ che sarà - spesso e volentieri - "implicitamente usato" nel calcolo dei limiti delle varie funzioni. Legato al concetto di continuità, introdurremo anche il concetto di DERIVABILITÀ e di DERIVATA. Questo ha un molteplice scopo: 1) per motivi di carattere "tecnico" (da τέχνη...), a volte è cosa molto utile calcolare i limiti attraverso le derivate (lo vedremo con il cosiddetto teorema de l'Hôpital); 2) lo studio della derivata riveste un ruolo fondamentale nello studio della crescenza e decrescenza e dei massimi e minimi di una funzione, e poi anche di altre proprietà; 3) le derivate sono speciali limiti (limiti di "rapporti incrementali", come vedremo...).

Sostanzialmente, il calcolo dei limiti si basa sui 4 limiti che abbiamo visto a pag. 9 e 10:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

(che si scrivono anche, con una notazione diciamo "impropria",

$\frac{1}{+\infty} = 0$, $\frac{1}{-\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$) e nelle seguenti regole (non vanno imparate a memoria, ma bisogna saperle usare negli esercizi):

1) IL LIMITE DELLA SOMMA È LA SOMMA DEI LIMITI

2) IL LIMITE DEL PRODOTTO È IL PRODOTTO DEI LIMITI

3) IL LIMITE DELLA DIFFERENZA È LA DIFFERENZA DEI LIMITI

4) IL LIMITE DEL QUOZIENTE È IL QUOZIENTE DEI LIMITI (se il denominatore è diverso da zero)

5) IL LIMITE DI UNA COSTANTE k È LA COSTANTE STESSA

Come conseguenza di 2) e 5), si ha che

6) "LA COSTANTE MOLTIPLICATIVA PUÒ ESSERE PORTATA FUORI O DENTRO IL SEGNO DI LIMITE"

7) $\frac{0}{+\infty} = 0$ $\frac{0}{-\infty} = 0$, ed anche $\frac{a}{+\infty} = 0$, $\frac{a}{-\infty} = 0$ per ogni numero reale a

8) $\frac{\text{numero reale positivo}}{0^+} = +\infty$ $\frac{\text{numero reale negativo}}{0^+} = -\infty$

$\frac{\text{numero reale positivo}}{0^-} = -\infty$ $\frac{\text{numero reale negativo}}{0^-} = +\infty$

$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$, $\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$, $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$, $\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$

(vale la cosiddetta "REGOLA DEI SEGNI")

9) Se a è un numero reale, è: $(+\infty) + a = +\infty$, $(-\infty) + a = -\infty$, $(+\infty) - a = +\infty$, $(-\infty) - a = -\infty$; inoltre $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$; se $a > 0$, $(+\infty) \cdot a = +\infty$, $(-\infty) \cdot a = -\infty$; $\frac{+\infty}{a} = +\infty$, $\frac{-\infty}{a} = -\infty$; se $a < 0$, $(+\infty) \cdot a = -\infty$, $(-\infty) \cdot a = +\infty$, $\frac{+\infty}{a} = -\infty$, $\frac{-\infty}{a} = +\infty$; $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

(ANCHE QUI VALE LA "REGOLA DEI SEGNI")

10) $0 \cdot$ funzione limitata $= 0$ (come detto a pag. 12)
$(\pm\infty)$ + funzione limitata $= \pm\infty$ (rispettivamente)

11) per ogni n intero positivo, $(+\infty)^n = +\infty$, $0^n = 0$, $(+\infty)^{-n} = 0$, $(0^+)^{-n} = +\infty$;
se n è pari, $(-\infty)^n = +\infty$, $(0^-)^{-n} = +\infty$; se n è dispari, $(-\infty)^n = -\infty$, $(0^-)^{-n} = -\infty$;
se b è reale ($b \in \mathbb{R}$): se $b > 0$, $(+\infty)^b = +\infty$, $(0^+)^b = 0$; se $b < 0$, $(+\infty)^b = 0$, $(0^+)^b = +\infty$

12) $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ $\quad (+\infty)^{-\infty} = 0$ $\quad 0^{+\infty} = 0$ $\quad 0^{-\infty} = +\infty$ (che è 0^+)

Restano i seguenti casi, che si chiamano FORME INDETERMINATE, perché non si può determinare un ben preciso valore del limite, in quanto PUÒ SUCCEDERE DI TUTTO, nel senso che una stessa forma, espressione, dà in alcuni casi un certo valore (per il limite) e in altri casi un altro valore.

LE FORME INDETERMINATE SONO:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \frac{+\infty}{-\infty} \quad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \frac{-\infty}{-\infty} \quad (+\infty)+(-\infty) \quad (-\infty)+(+\infty)$$

$$0^0 \quad 1^{+\infty} \quad 1^{-\infty} \quad (+\infty)^0 \quad 0\cdot(+\infty) \quad 0\cdot(-\infty) \quad (+\infty)\cdot 0$$

$(-\infty)\cdot 0$. Quindi si porrà il problema "Come risolvere le forme indeterminate", e daremo dei "trucchetti".

I limiti e le derivate ci permetteranno di svolgere lo studio di funzione, che corrisponderà allo studio del fenomeno che stiamo analizzando (per esempio, in Fisica, la velocità di un punto materiale lungo una traiettoria rettilinea).

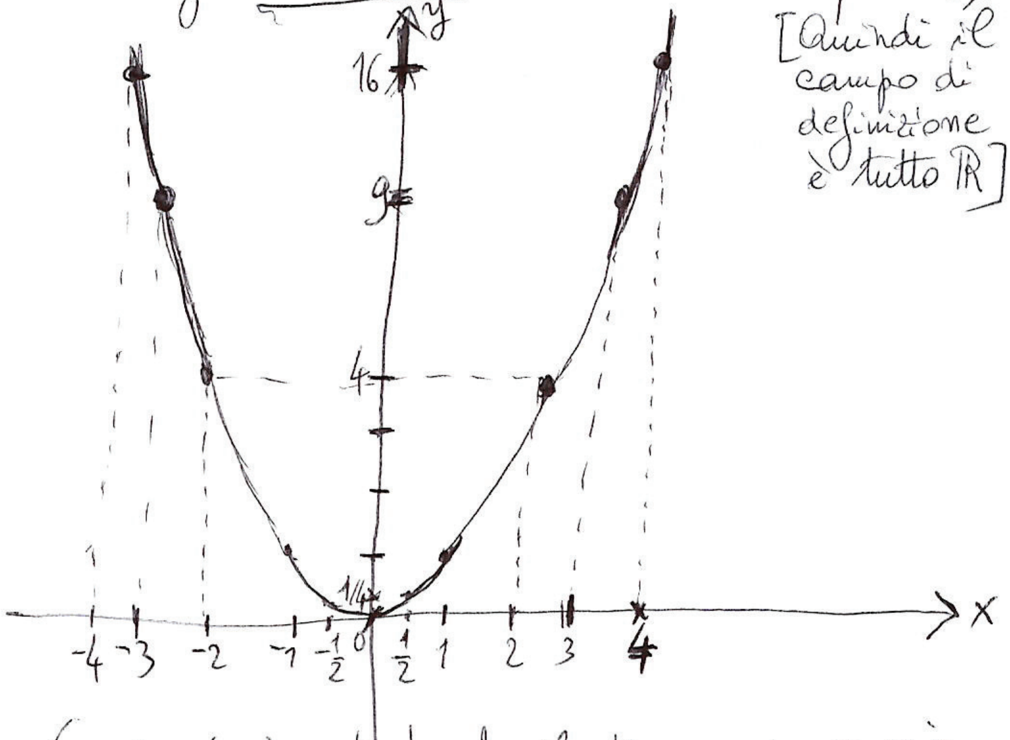
Prima di procedere con il calcolo dei limiti, diamo altri esempi di funzioni di cui studiamo (anche) i limiti (e non solo i limiti!)

ESEMPI

Consideriamo ora $f(x) = x^2 = x \cdot x$, quella funzione che a ogni <u>numero reale</u> x associa il suo quadrato, x^2.

[Quindi il campo di definizione è tutto $\mathbb{R}$]

x	x^2
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
2	4
3	9
4	16
...	...



(... non è importante che il disegno sia proprio in proporzione, ma quello che è importante è l'idea)

Il grafico di questa funzione sarà una curva (parabola) simmetrica rispetto all'asse delle y, che funge da "specchio". Avremo, per ogni $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{f(-x) = f(x)}$

Una funzione che gode di questa proprietà si chiama funzione <u>PARI</u>. Per esempio: $f(-4) = f(4) = 16$, $f(-1) = f(1) = 1$, $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, e così via.

Notiamo che, quando x diventa <u>molto grande</u>, allora x^2 diventa anch'esso molto grande quanto vogliamo, e diventa molto grande più rapidamente di x (perché abbiamo, per esempio, $4^2 = 16$, $5^2 = 25$, $10^2 = 100$, $100^2 = 10000$ (diecimila), e così via)

Questo concetto si traduce sinteticamente nell'espressione matematica $\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty}$, ove la frase "quando x diventa molto grande" si esprime con $x \to +\infty$ (x che tende a $+\infty$) mentre la frase "x^2 diventa molto grande quanto vogliamo" si esprime come "$= +\infty$" (il membro di <u>destra</u> dell'uguaglianza, che sarà il risultato del nostro "limite"). Diremo che "<u>limite</u> per x che tende a $+\infty$ di x^2 è uguale a $+\infty$".

Analogamente, quando $x = -t$ e t diventa molto grande ($t = -x$) (quindi, p.es. $x = -10^9$, $x = -10^{1000}$, ...) (vale a dire quando "x tende a $-\infty$", si dice così in linguaggio matematico), allora x^2 diventa anch'esso molto grande quanto vogliamo (si può vedere questo anche "per simmetria", guardando il grafico di x^2):
Ciò si esprime scrivendo $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty}$ e dicendo che "limite per x che tende a $-\infty$ di x^2 è uguale a $+\infty$".
Notiamo che x^2 diventa molto grande più rapidamente di t (cioè di $-x$) quando x "tende a $-\infty$": per esempio, se $x = -5$, allora $t = 5$, ed $x^2 = (-5)^2 = (-5)\cdot(-5) = 25 = 5^2$ (regola dei segni, $-$ per $-$ fa $+$); se $x = -1000$ (-mille), allora $t = 1000$, ed $x^2 = 1000\,000$ (un milione), e così via. Inoltre, come si vede dal grafico, la nostra funzione $f(x) = x^2$ è positiva se e solo se $f(x)$ è <u>diverso</u> da 0, mentre $f(x) = 0$ (cioè f si annulla) se e solo se $x = 0$. Inoltre, per $x \geq 0$, f è <u>strettamente crescente</u> (Che vuol dire? Che, se $x_1, x_2 \geq 0$ ed $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$), mentre per $x \leq 0$ f è <u>strettamente decrescente</u> (cioè, se $x_1, x_2 \leq 0$ <u>ed $x_1 < x_2$</u>, allora $f(x_1) > f(x_2)$), come si vede dal grafico. (*) (v. ESERCIZIO).

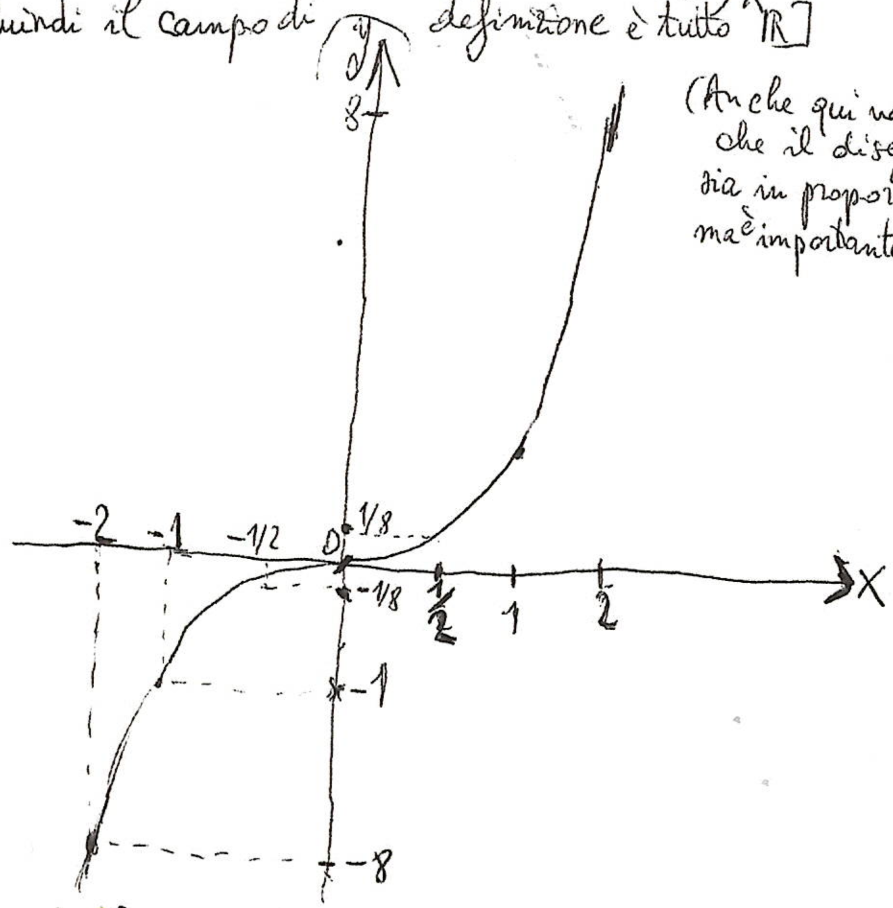
Inoltre, dal grafico si vede che la nostra parabola <u>rivolge la concavità verso l'alto</u>. Una funzione che ha questa proprietà si chiama <u>convessa</u>, mentre una funzione che rivolge la concavità verso il <u>basso</u> la si dice <u>concava</u>.

[N.B.: Per studiare queste ultime proprietà nominate, cioè dalla crescenza in poi, si introdurranno le <u>derivate</u>]

(*) ES.: Proviamo la stretta crescenza per $x \geq 0$. Siano $0 \leq x_1 < x_2$. Si ha: $\boxed{x_1^2} = x_1 \cdot x_1 \leq x_1 \cdot x_2 \boxed{<} x_2 \cdot x_2 = \boxed{x_2^2}$. Se invece $x_1 < x_2 \leq 0$, posto $y_1 = -x_2$, $y_2 = -x_1$, si ha $y_2 > y_1 \geq 0$; quindi, per il punto precedente, $y_2^2 > y_1^2 \geq 0$, da cui $\boxed{x_1^2} = (-y_2)^2 = y_2^2 \boxed{>}$ $\boxed{>} y_1^2 = (-y_1)^2 = \boxed{x_2^2}$, come volevamo dimostrare.

Consideriamo ora $f(x)=x^3=x\cdot x\cdot x=x^2\cdot x=x\cdot x^2$, quella funzione che a ogni __numero reale__ x associa il suo cubo, x^3
[Quindi il campo di definizione è tutto $\mathbb{R}$]

x	x^3
-2	-8
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
...	...



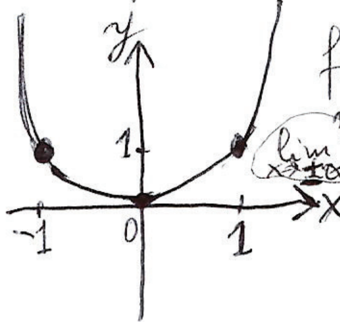
(Anche qui non importa che il disegno non sia in proporzione ma è importante l'idea)

Il grafico di questa funzione è una curva simmetrica rispetto all'**origine** degli assi coordinati. Avremo, per ogni $x\in\mathbb{R}$: $f(-x)=-f(x)$
Una funzione che ha questa proprietà si chiama funzione DISPARI.
Per esempio, $f(-2)=(-2)^3=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=4\cdot(-2)=-8$, mentre
$f(2)=2\cdot2\cdot2=2^3=4\cdot2=8$, e quindi $\boxed{-f(2)}=-8=\boxed{f(-2)}$, e così via.
Notiamo che, quando x diventa molto grande, allora x^3 diventa molto grande quanto vogliamo, e diventa grande più rapidamente di x (perché si ha ad esempio, $2^3=8$, $3^3=27$, $10^3=1000$ (mille), 1000^3 = un miliardo = $1000000000=10^9$, e così via). Quindi
$\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty}$, e si dice "limite per x che tende a $+\infty$ di x^3 è uguale a $+\infty$". Quando "x tende a $-\infty$", cioè la quantità $t=-x$ "tende a $+\infty$", si ha che $-(x^3)=(-x)^3$ "tende a $+\infty$", e quindi x^3 "tende a $-\infty$". Vediamolo con un esempio: $(-5)^3$ è già uguale a -125. Cosa significa? Qui, $x=-5$, e posto $t=-x$, $t=5$, $(-x)^3=t^3=5^3=5^2\cdot5=25\cdot5=125$

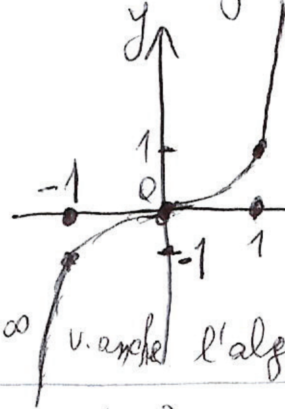
Quindi $\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty}$

Osservazione: Notiamo che, dal grafico, si vede che: $x^3>0$ se e solo se $x>0$; $x^3=0$ se e solo se $x=0$; $x^3<0$ se e solo se $x<0$; la funzione $f(x)=x^3$ è STRETTAMENTE CRESCENTE ~~in~~ tutto $\mathbb{R}$, cioè, comunque si prendano due punti x_1, x_2 appartenenti ad $\mathbb{R}$, quindi due numeri reali x_1, x_2, tali che $x_1<x_2$, si ha $\boxed{f(x_1)<f(x_2)}$, cioè $x_1^3<x_2^3$. (*)

N.B.: Si può vedere che, quando n è pari, la funzione $f(x)=x^n$ ha un comportamento del tutto analogo a quello della funzione $f(x)=x^2$, mentre quando n è dispari, la funzione $f(x)=x^n$ si comporta analogamente come la funzione $f(x)=x^3$.



$f(x)=x^n$
n pari
$\lim_{x\to\pm\infty} x^n=+\infty$



$f(x)=x^n$
n dispari
$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ v. anche l'algebra dei limiti

ESERCIZIO:

(*) Questo lo si può vedere distinguendo 3 casi (se $x_1=0$ o $x_2=0$, è molto facile)

1° caso: $x_1<0<x_2$. Per via del segno della funzione x^3, è $x_1^3<0<x_2^3$;

2° caso: $0<x_1<x_2$. Si ha: $0<\boxed{x_1^3}=x_1\cdot x_1\cdot x_1<x_2\cdot x_1\cdot x_1<x_2\cdot x_2\cdot x_1<x_2\cdot x_2\cdot x_2=\boxed{x_2^3}$.

3° caso: $x_1<x_2<0$. Si ha, ponendo $a=-x_1$, $b=-x_2$: $a>b>0$.
Per il 2° caso, otteniamo $a^3>b^3>0$, e quindi

$$\boxed{x_1^3}=(-a)^3=-a^3\boxed{<}-b^3=(-b)^3=\boxed{x_2^3},$$

come si voleva dimostrare.

PRIMI ESERCIZI SUI LIMITI

Ora iniziamo a fare qualche esercizio sul calcolo di limiti. Per fare i prossimi esercizi, si usano le seguenti tecniche:

1) Si sostituisce al posto di x, nel testo della funzione, il valore a cui tende x nel limite.

2) Si sviluppano i calcoli tenendo conto che il limite della somma (differenza, prodotto, quoziente con denominatore diverso da 0) è uguale alla somma (differenza, prodotto, quoziente) dei limiti, e tenendo conto dell'<u>algebra dei limiti</u> (oltre che dell'algebra usuale)

Esercizio l_1) Calcolare $l_1 = \lim_{x \to 2} (2x^3 + x^2 - 3x - 1)$

Si ha: $l_1 = \lim_{x \to 2} (2 \cdot x \cdot x \cdot x + x \cdot x - 3x - 1) =$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 1 = 16 + 4 - 6 - 1 = 20 - 7 = 13$

Esercizio l_2) Calcolare $l_2 = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 + 5x^2 + 7$. Si ha:

$$l_2 = 2 \cdot (+\infty) \cdot \underbrace{(+\infty) \cdot (+\infty)}_{(+\infty)} + 5 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) + 7 =$$

(proprietà associativa!)

$$= 2 \cdot (+\infty) + 5 \cdot (+\infty) + 7 = (+\infty) + (+\infty) + 7 = (+\infty) + 7 = +\infty$$

Esercizio l_3) Calcolare $l_3 = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 6x - 3}{x + 5}$. Si ha:

$$l_3 = \frac{0^2 - 6 \cdot 0 - 3}{0 + 5} = -\frac{3}{5}$$

Esercizio l_4) Calcolare $l_4 = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 2}{6x - 4}$. Si ha:

$$l_4 = \frac{1 \cdot 1 + 1 + 2}{6 \cdot 1 - 4} = \frac{4}{2} = 2$$

$(+\infty)+(-\infty)$

Esercizio l_5. Calcolare $\boxed{l_5 = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - x^2 + 3)}$

Si ha: $l_5 = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - x^2 + 3) = \lim_{x\to+\infty} (2\cdot x\cdot x\cdot x - x\cdot x + 3) = 2\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) - [(+\infty)\cdot(+\infty)] + 3) =$

$= +\infty \underbrace{- \infty + 3}_{=-\infty} = (+\infty) + (-\infty)$ FORMA INDETERMINATA

Come si svolge il $\lim_{x\to\pm\infty}$ polinomio del tipo $(+\infty)+(-\infty)$ oppure $(-\infty)+(+\infty)$?

1° modo: Si applica il "principio di sostituzione degli infiniti", che afferma che i termini di grado più piccolo possono essere "eliminati". Quindi si ha:

$\boxed{l_5} = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - x^2 + 3) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = 2\cdot(+\infty)^3 \overset{\text{v. formula 11}}{\underset{\text{pag. 15}}{=}} 2\cdot(+\infty) = \boxed{+\infty}$.

2° modo: Si raccoglie la x di grado massimo

$\boxed{l_5} = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty} x^3\cdot\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (+\infty)^3\cdot$

$\cdot\left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3}\right) = (+\infty)\cdot\left(2 - 0 + \frac{3}{+\infty}\right) =$

$= +\infty\cdot(2 - 0 + 0) = (+\infty)\cdot 2 = \boxed{+\infty}$.

Esercizio l_6 Calcolare $l_6 = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - x^2 + 3)$

1° modo: Per il principio di sostituzione degli infiniti, si ha

$\boxed{l_6} = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = 2\cdot(-\infty)^3 \overset{\text{pag. 15, formule 11}}{=} 2\cdot(-\infty) = \boxed{-\infty}$.

2° modo: Raccogliendo la x di grado massimo, si ha: $\boxed{l_6} =$

$= \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (-\infty)^3\cdot\left(2 - \frac{1}{-\infty} + \frac{3}{(-\infty)^3}\right) =$

$= (-\infty)\cdot\left(2 - 0 + \frac{3}{-\infty}\right) = (-\infty)\cdot(2 - 0 + 0) = (-\infty)\cdot 2 = \boxed{-\infty}$.

Adesso vediamo come si svolge il

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Esempio: Calcolare

$$l_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+11}{2x^2-13}$$

1° modo (più rapido): Si applica il principio di sostituzione degli infiniti, che afferma che, nel calcolo di questi tipi di limiti, si prende il termine di grado massimo sia al numeratore che al denominatore. Nel nostro caso,

$$l_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Come l'intuizione suggerisce, in quanto tra x e $2x^2$ è più forte $2x^2$.

2° modo (che, per questo tipo di limiti, nel corso di queste note utilizzeremo solo questa volta): Si raccoglie, SIA AL NUMERATORE CHE AL DENOMINATORE, il (rispettivo) termine di grado massimo, ottenendo

$$l_7 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+11}{2x^2-13} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(1+\frac{11}{x}\right)}{x^2\cdot\left(2-\frac{13}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty}$$

$$\frac{1+\frac{11}{x}}{x\cdot\left(2-\frac{13}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{11}{+\infty}}{(+\infty)\cdot\left(2-\frac{13}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1+0}{(+\infty)\cdot\left(2-\frac{13}{+\infty}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(+\infty)\cdot(2-0)} = \frac{1}{2\cdot(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Esaminiamo ancora più da vicino il caso del

$$(*) \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Visto che, sia al numeratore che al denominatore, "comandano" i termini di grado massimo, si ha che:

1) Se il polinomio al numeratore ha grado maggiore del polinomio al denominatore, allora il risultato del limite in $(*)$ è $+\infty$ oppure $-\infty$, a seconda della regola dei segni.

2) Se i due polinomi al numeratore e al denominatore hanno lo stesso grado, allora il risultato del limite in $(*)$ è il rapporto dei coefficienti dei termini di grado massimo.

3) Se il polinomio al numeratore ha grado minore del polinomio al denominatore, allora il risultato del limite in $(*)$ è 0.

Vediamo ora alcuni esempi. ("VINCE" IL GRADO PIÙ GRANDE)

ℓ_8 $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5 - 3x + 21}{2x^2 + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4x^5}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 =$$
$$= 2 \cdot (+\infty)^3 = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

ℓ_9 $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^5 - 3x + 21}{2x^2 + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^5}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x^3 =$$
$$= 2 \cdot (-\infty)^3 = 2 \cdot (-\infty) = -\infty$$

ℓ_{10} $$\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2 + x - 11}{x - 6} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} -3x =$$
$$= (-3) \cdot (+\infty) = -\infty$$

ℓ_{11} $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + 9x^3 + 1}{x^3 + 4x^2 - 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} 2x = 2 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

l_{12} $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{7x^3-5x+1}{2x^3+9} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{7x^3}{2x^3} = \frac{7}{2}.$

l_{13} $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2-7x+29}{4x-2x^2-11} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{-2x^2} = -\frac{3}{2}.$

l_{14} $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{9x^3-5x+13}{3x^4+x+7} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{9x^3}{3x^4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{\pm\infty} = 0$

l_{15} $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+4x+17}{2x^3-x+5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{2x} =$

$= \frac{3}{2\cdot(\pm\infty)} = \frac{3}{\pm\infty} = 0$

l_{16} $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5+2x}{11x-2x^2+7} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-2x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-1)\cdot\frac{1}{x} =$

$= (-1)\cdot\frac{1}{\pm\infty} = (-1)\cdot 0 = 0.$

Consideriamo e studiamo ora il caso

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{polinomio}}{\text{polinomio}} = \frac{0}{0}$$

ove x_0 è un numero <u>reale</u>.

Vediamolo direttamente con un esempio. Calcoliamo

$$L_1 = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 18}$$

Sostituendo x con 3, si ha: $3^2 - 7 \cdot 3 + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$

Sostituendo x con 3, si ha: $3^2 - 9 \cdot 3 + 18 = 9 - 27 + 18 = 0$

Si tratta quindi di una forma del tipo $\frac{0}{0}$, quindi indeterminata.

Sappiamo già che 3 è una radice sia del trinomio $x^2 - 7x + 12$ sia del trinomio $x^2 - 9x + 18$ (cioè è una soluzione delle equazioni $x^2 - 7x + 12 = 0$ ed $x^2 - 9x + 18 = 0$). Quindi l'idea è quella di "<u>DECOMPORRE</u> IL TRINOMIO E SEMPLIFICARE", (al numeratore e al denominatore).

Quindi determiniamo <u>tutte</u> le radici dei due trinomi.

Cominciamo risolvendo l'equazione $x^2 - 9x + 18 = 0$ $a = 1$ $b = -9$ $c = 18$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 72}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$ (Ripassare nel precorso PARTE 1)

Le radici sono $x_1 = 3$, $x_2 = 6$, e pertanto $\boxed{x^2 - 9x + 18 = (x-3) \cdot (x-6)}$

Risolviamo ora l'equazione $x^2 - 7x + 12 = 0$ $a = 1$ $b = -7$ $c = 12$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

Le radici sono $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, e pertanto $x^2 - 7x + 12 = (x-3) \cdot (x-4)$

Quindi si ha: $L_1 = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)} \cdot (x-4)}{\cancel{(x-3)} \cdot (x-6)} = \frac{3-4}{3-6} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

N.B.: Siccome 3 è un numero <u>reale</u>, qui <u>NON</u> SI PUÒ APPLICARE IL PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE DEGLI INFINITI (!)

[Osservazione: Siccome sappiamo già che 3 è una radice dei due trinomi $x^2-7x+12$ ed $x^2-9x+18$, allora possiamo ottenere le decomposizione $x^2-7x+12=(x-3)\cdot(x-4)$, $x^2-9x+18=$ $=(x-3)\cdot(x-6)$ anche con la divisione euclidea e con la regola di Ruffini. Con la divisione euclidea si ha

$$\begin{array}{rr|l} x^2-7x+12 & & x-3 \\ \cline{3-3} -x^2+3x & & x-4 \\ \cline{1-1} -4x+12 & & \\ 4x-12 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rr|l} x^2-9x+18 & & x-3 \\ \cline{3-3} -x^2+3x & & x-6 \\ \cline{1-1} -6x+18 & & \\ 6x-18 & & \\ \cline{1-1} 0 & & \end{array}$$

e quindi

$x^2-7x+12=(x-3)\cdot(x-4)$ $\qquad$ $x^2-9x+18=(x-3)\cdot(x-6)$,

mentre con la regola di Ruffini si ottiene

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & -7 & 12 \\ 3 & & 3 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|c} & 1 & -9 & 18 \\ 3 & & 3 & -18 \\ \hline & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

ottenendo ancora

$x^2-7x+12=(x-3)\cdot(x-4)$ $\qquad$ $x^2-9x+18=(x-3)\cdot(x-6)$]

Adesso facciamo un altro esempio. Calcoliamo

$$L_2=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

Si ha $3^2-9=9-9=0$, $3-3=0$ (quindi forma $\frac{0}{0}$)

Notiamo che $x^2-9=0$ se e solo se $x^2=9$ se e solo se $x=3$ oppure $x=-3$. Quindi le radici sono 3 e -3, e si ha $x^2-9=(x-3)\cdot(x+3)$.

Pertanto $L_2=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}\cdot(x+3)}{\cancel{x-3}}=6$

$$\boxed{\begin{array}{c} a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \\ \text{con } a=x,\ b=3 \end{array}}$$

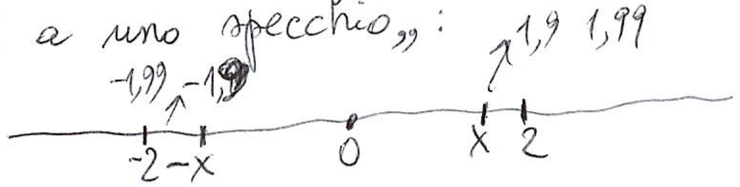
Facciamo ora qualche altro esercizio.

Calcolare il seguente limite

$$L_3 = \lim_{x \to 2^-} \frac{3-2x}{2-x}$$

Se sostituiamo x con 2, allora il numeratore tende a $3 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$, mentre il denominatore tende a 0. La forma è quindi del tipo $\frac{-1}{0}$, quindi il risultato sarà $+\infty$ oppure $-\infty$ a seconda della "regola dei segni". Ma al denominatore che cosa ci metteremo? 0 (zero) dalla sinistra, oppure dalla destra?

Facciamo <u>molta</u> attenzione. Abbiamo che x tende a 2 da sinistra (quindi assumendo valori del tipo 1,9, 1,99, ..., 1,999 ...), quindi, quando si considera $-x$, si cambiano <u>tutti</u> i segni e si cambia <u>ANCHE</u> la posizione "da destra – da sinistra", perché è come se "fossimo davanti a uno specchio":



Quindi, se x tende a 2 da sinistra, cioè con valori più piccoli di 2 (1,9 1,99...), allora $-x$ tende a -2 con valori più <u>grandi</u> di -2 (perché $-1,9$ $-1,99$ ... sono più <u>grandi</u> di -2), cioè da destra. Pertanto, SE SI CAMBIA IL SEGNO, IL RUOLO DI DESTRA E SINISTRA SI INVERTE.

Quindi $-x$ tende a -2 da <u>destra</u>, e pertanto, se aggiungiamo 2, si ha che $2-x$ tende a $2-2=0$ pure da <u>destra</u> (infatti $2-x$ sarà del tipo: $2-1,9=0,1$ $2-1,99=0,01$ $2-1,999=0,001$ ...)

Quindi al denominatore c'è 0 da destra, e allora $L_3 = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (per la regola dei segni).

Analogamente come nel caso precedente, calcoliamo

$$L_4 = \lim_{x \to 2^+} \frac{3-2x}{2-x}$$

Come nel caso precedente, la forma è del tipo $\frac{-1}{0}$. Questa volta, x tende a 2 da destra (diciamo, assumendo valori del tipo 2,1 2,01 2,001 ...). Allora, quando si fa il "ribaltamento", $-x$ tende a -2 diciamo assumendo valori del tipo $-2,1$ $-2,01$ $-2,001$ ..., e quindi DA SINISTRA (perciò anche il discorso "destra/sinistra" SI INVERTE)

(infatti, naturalmente, i valori $-2,1$, $-2,01$, $-2,001$ ... sono più piccoli di -2)
Quindi, $-x$ tende a -2 da <u>sinistra</u> e pertanto, se aggiungiamo 2, si ha che $2-x$ tende a $2-2=0$ pure da <u>sinistra</u> (infatti $2-x$ sarà del tipo $2-2,1$ $2-2,01$ $2-2,001$, cioè $-0,1$ $-0,01$ $-0,001$ (ossia i valori "vanno verso 0" ma da sinistra, sono negativi). Quindi al denominatore c'è 0 da sinistra, e allora

$$\boxed{L_4 = \frac{-1}{0^-} = +\infty}$$ (in virtù della regola dei segni)

La tecnica adesso illustrata si usa <u>sempre</u> per gli esercizi di questo tipo.

$$L_5 = \lim_{x \to -3^-} \frac{-x+2}{x+3}$$

Sostituendo x con -3, si ottiene $\frac{-(-3)+2}{-3+3} = \frac{5}{0}$. Allora,

Ora, teniamo conto che x tende a -3 da <u>sinistra</u>. Allora, "aggiungendo" 3, si ottiene che $x+3$ tende a 0, sempre dallo stesso lato, cioè da <u>sinistra</u>. Abbiamo quindi $\frac{5}{0^-}$, cioè $L_5 = -\infty$ (regola dei segni)

$L_6 = \lim_{x \to -3^+} \frac{-x+2}{x+3}$ Abbiamo visto che si ha $\frac{5}{0}$. Inoltre, x tende a -3 da <u>destra</u> e allora $x+3$ tende a $-3+3$, cioè a 0, sempre da <u>destra</u>.

Si ha: $\boxed{L_6 = \frac{5}{0^+} = +\infty}$ (in virtù della regola dei segni)

Calcolare $\boxed{L_7 = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x-2}}$

Sostituendo x con 2 (sia al numeratore sia al denominatore) si ha $L_7 = \frac{2-1}{2-2} = \frac{1}{0}$. Adesso: 0, da destra o da sinistra? x tende a 2 da sinistra; sottraendo 2 (oppure: "aggiungendo −2"), otteniamo che x−2 tende a 2−2 DALLO STESSO LATO, cioè sempre da sinistra. Pertanto, $\boxed{L_7 = \frac{1}{0^-} = -\infty}$, per la regola dei segni.

Calcolare $\boxed{L_8 = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2}}$

Come per L_7, si ha che L_8 è della forma $\frac{1}{0}$. Notiamo che, questa volta, x tende a 2 da destra, e quindi x−2 tende a 2−2=0 sempre da destra. Quindi $\boxed{L_8 = \frac{1}{0^+} = +\infty}$, in virtù della regola dei segni.

Finora abbiamo studiato, analizzato, calcolato limiti ~~per~~ funzioni che sono del tipo "rapporto di due polinomi". Ora, nello studio dei nostri fenomeni in tantissime aree delle scienze, questi fenomeni sono descritti, in generale, attraverso tanti tipi di funzioni. Quindi "presenteremo" diversi tipi di funzioni, e prima introdurremo dei concetti che riguardano alcune proprietà delle funzioni (in generale) che sono in realtà molto collegate con i limiti (sia dal punto di vista concettuale che dal punto di vista "tecnico").

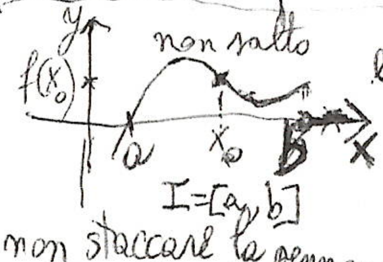
Cominciamo con la $\boxed{\text{continuità}}$.

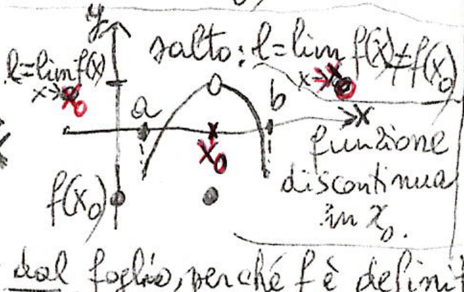
Senza perdita di generalità, supporremo che le nostre funzioni sono definite in un intervallo, o una semiretta, o in tutto $\mathbb{R}$.

[N.B: Un sottoinsieme dei numeri reali che è un intervallo, o una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$, lo chiameremo — per brevità — insieme di tipo I] (Per gli intervalli e semirette, vedi pag. 5 di queste note)

[N.B.2: Per funzioni definite in insiemi che sono unioni finite e disgiunte di intervalli e/o semirette, la continuità viene studiata su ogni singolo intervallo o semiretta separatamente]

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un insieme di tipo I, e sia $x_0 \in I$. Si dice che una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se "non fa salti" in corrispondenza di x_0, cioè se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$.





Se $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in ogni punto $x_0 \in I$, si dice che f è CONTINUA in I (vuol dire: non staccare la penna dal foglio, perché f è definita su un insieme DI TIPO I).

Notiamo che, invece di dire

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$ si può dire $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)}$.

Infatti, facciamo un cambiamento di coordinate. Poniamo $h = x - x_0$. Allora $x = x_0 + h$. Inoltre, quando x tende ad x_0, allora $h = x - x_0$ tende a 0. Allora, al posto di $x \to x_0$, ci metteremo $h \to 0$, mentre al posto di x ci mettiamo x_0+h.

In letteratura, invece di dire

f è continua in x_0 se $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0)}$,

si dice più semplicemente

f è continua in x se $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)}$

(ma è solo una questione di notazione, perché in questo modo viene usata la lettera x (che ora è «libera») al posto della lettera x_0, ed è più comodo, perché qui x sarà il punto fissato, e non più la variabile).

Notiamo anche che, poiché "il limite della differenza è uguale alla differenza dei limiti" e dato che $\lim_{h \to 0} f(x) = f(x)$ (visto che $f(x)$ è una costante, rispetto alla variabile h), allora dire che $\boxed{\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)}$

è equivalente a dire che

PROPRIETÀ: $\boxed{\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = 0}$.

Osserviamo che somma, differenza, prodotto, quoziente (con denominatore diverso da 0) di 2 funzioni continue sono funzione continue, e (quindi) la somma e il prodotto di un numero finito di funzioni continue sono funzioni continue. Inoltre, I POLINOMI SONO FUNZIONI CONTINUE.

N.B.: Detto in sintesi, in un punto x_0 dove la funzione è continua, si ha che «IL LIMITE DELLA FUNZIONE È UGUALE ALLA FUNZIONE DEL LIMITE».

Per analizzare «più da vicino» la continuità, vediamo altre proprietà delle funzioni.

Un concetto collegato a quello di <u>continuità</u> è quello di <u>derivabilità</u> (sono comunque due concetti <u>diversi</u>: continuità e derivabilità <u>non sono</u> la stessa cosa) e di derivata. ① Siccome, nella teoria dei limiti, alcuni tipi di limiti vengono calcolati "passando alle derivate"; ② siccome le derivate sono particolari limiti; ③ siccome molto spesso è più facile dimostrare che una funzione è derivabile piuttosto che è continua (e, una volta che abbiamo dimostrato la derivabilità, abbiamo automaticamente la continuità, in quanto LA DERIVABILITÀ IMPLICA LA CONTINUITÀ, mentre invece in generale non è vero che la continuità implica la derivabilità); ④ e soprattutto, per cercare, nel seguito, di evitare di essere in situazioni tali da dover presentare (didatticamente) uno stesso concetto più volte, allora diamo il concetto di derivabilità (e di derivata) già nelle prossime pagine a seguire.

[N.B.: Oltre alla derivabilità, ci sono anche altre proprietà delle funzioni che si possono "collegare" con la continuità, e che vedremo in seguito].

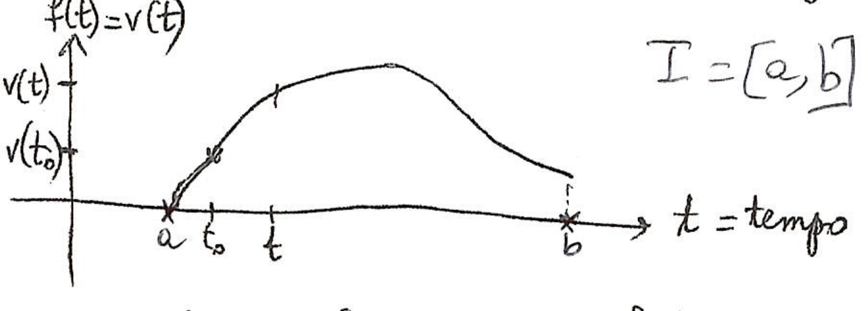
Introduciàmo ora il concetto di DERIVATA di una funzione. (DERIVATA, o DERIVATA PRIMA)

Spesso, quando studiamo l'evoluzione di un fenomeno al trascorrere del tempo, è molto importante analizzare la "rapidità" con cui il fenomeno si evolve, cioè la "rapidità" con la quale cambiano i valori della funzione studiata.

L'ente matematico che esprime questa "rapidità" è la <u>derivata</u> della funzione analizzata.

Introduciamo il concetto di derivata partendo da un esempio tratto dalla Fisica.

Un punto materiale si muove lungo una traiettoria rettilinea, la cui velocità $v(t)$ è data dalla figura



Cosa fa questa velocità? Cresce? Decresce? In quali intervalli cresce o decresce? Vogliamo vedere il modo in cui $v(t)$ cresce o decresce in intervalli molto piccoli (parlando di ACCELERAZIONE o DECELERAZIONE), e anche vogliamo avere una stima di questa accelerazione o decelerazione in corrispondenza a un istante fissato t_0 (accelerazione ISTANTANEA).

Misuriamo l'accelerazione in intervalli sempre più piccoli, del tipo $[t_0, t]$ oppure $[t, t_0]$
Misuriamo quindi la CRESCITA o DECRESCITA della nostra $v(t)$. Crescita o decrescita significa confrontare i valori $v(t)$ e $v(t_0)$ e vedere qual è il più grande. L'accelerazione (o decelerazione) vuole misurare DI QUANTO cresce (o decresce) la nostra velocità v.
Quindi si CONFRONTA la quantità $v(t)-v(t_0)$ con $t-t_0$ cioè si confronta l'incremento della velocità con l'incremento del tempo e si considera il rapporto $\frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$
(RAPPORTO incrementale, con t SEMPRE PIÙ (DEFINITIVAMENTE) vicino a t_0).

Si fa a questo punto il limite

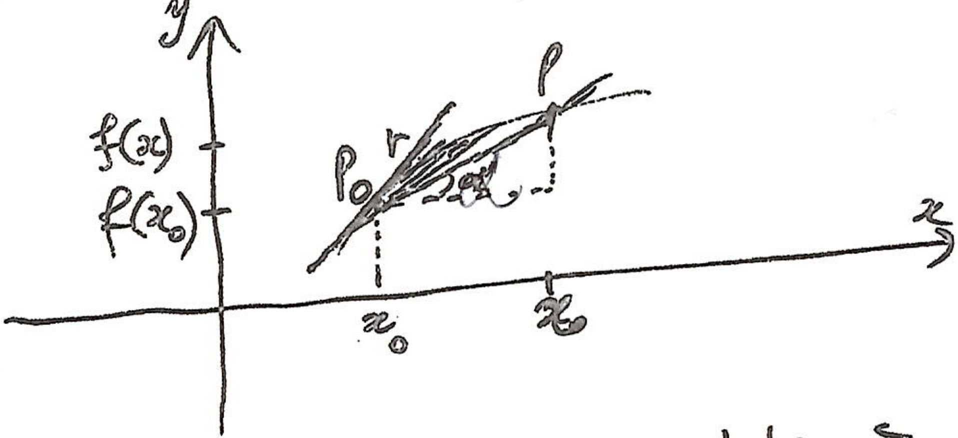
$$l = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$$

l sarà la nostra $a(t_0)$, accelerazione ISTANTANEA relativa all'istante temporale t_0.
(l'ampiezza di $[t_0, t]$ la si prende SEMPRE PIÙ PICCOLA)
Si dice che $a(t_0)$ è la DERIVATA di v nel punto t_0. (se l esiste ed è un numero reale)

In generale, se I è un intervallo o una semiretta della retta reale o tutto $\mathbb{R}$ ed $x_0 \in I$, ed $f: I \to \mathbb{R}$, diremo che f è DERIVABILE in x_0 se esiste in $\mathbb{R}$ (esiste finito, quindi non $+\infty$, e neppure $-\infty$) il limite $l = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, e si scrive

$\boxed{l = f'(x_0)}$ (DERIVATA di f calcolata in x_0)

SIGNIFICATO GEOMETRICO



$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, rapporto tra due cateti, è il coefficiente angolare della retta secante (congiungente i punti P_0 e P), cioè la tangente goniometrica di α ($tg\, \alpha$). Al limite, per $x \to x_0$, la retta secante tende alla retta tangente r. Se f è derivabile in x_0, esiste, non verticale la retta tangente, e la derivata $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Se f non è derivabile in x_0, allora NON c'è la retta tangente, oppure la retta tangente è verticale.

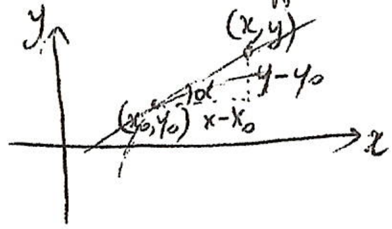
Geometricamente parlando, $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente, cioè l'equazione della retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto $P=(x_0, f(x_0))$ è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Infatti l'equazione del fascio di rette passanti per il punto P (tranne quella verticale) è data da

$$y - f(x_0) = m(x-x_0)$$

ove m rappresenta il coefficiente angolare



$m = tg\,\alpha$
$y_0 = f(x_0)$

Similmente al caso della continuità, nella definizione di derivabilità, invece del $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, si può parlare del $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Infatti, poniamo $h = x-x_0$. Allora $x = x_0+h$. Inoltre, quando x tende ad x_0, allora $h = x-x_0$ tende a 0. Quindi, al posto di $x\to x_0$ ci mettiamo $h\to 0$, mentre al posto di x ci mettiamo x_0+h, ottenendo l'espressione $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Invece di questa espressione si può usare anche $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$: in questo modo viene usata la lettera x al posto del simbolo x_0, ed in generale è più comodo, e qui x sarà il <u>punto fissato</u>, e non più la variabile (che sarà h).

Legami tra derivabilità e continuità.

Defin.: Sia $I \subset \mathbb{R}$ un insieme di tipo I (cioè: intervallo, o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$). Si dice che f è derivabile in I se è derivabile in ogni punto $x_0 \in I$.

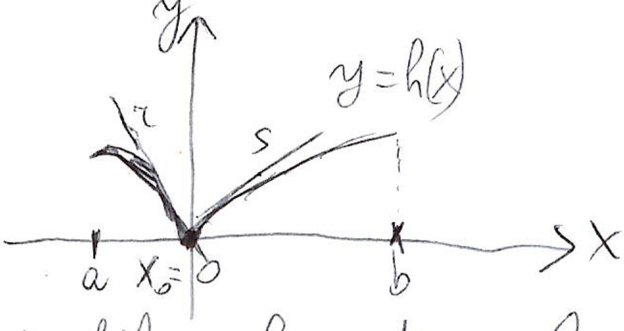
TEOREMA (SENZA DIMOSTRAZIONE)

Sia $x_0 \in I$. Se $f: I \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Quindi DERIVABILITÀ IMPLICA CONTINUITÀ.

Il viceversa, in generale, non è vero, in quanto esistono funzioni continue in un punto $x_0 \in I$ che non sono derivabili in x_0.

Infatti, la funzione h in figura è continua in tutto $I = [a,b]$ (infatti, non stacco la penna dal foglio) ma non è derivabile nel punto $x_0 = 0$, perché, se fosse derivabile, esisterebbe una sola retta tangente.



Invece dalla figura si vede che ci sono due semirette tangenti in corrispondenza del punto $x_0 = 0$: la prima, r, si riferisce alla parte subito a sinistra del punto x_0, mentre la seconda, s, si riferisce alla parte subito a destra del punto x_0. Pertanto la funzione h non è derivabile in $x_0 = 0$, mentre è continua in $x_0 = 0$. Un punto x_0 di questo tipo si chiama "PUNTO ANGOLOSO".

Vediamo ora alcuni esempi di funzioni derivabili

-38-

ESERCIZI

1) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$ (costante) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Allora la derivata di f è 0 in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$.

Per ogni punto $x \in \mathbb{R}$, si ha:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{0}{\overbrace{k - k}}}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0,$$

in quanto il limite di una costante è la costante stessa.

Quindi, detto in modo semplice,

$$\boxed{\text{LA DERIVATA DI UNA COSTANTE È } 0}.$$

2) Sia ora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Allora la derivata di f è 1 in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$, è

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1,$$

in quanto il limite di una costante è la costante stessa.

N.B.: Attenzione alle proprietà della funzione identità:

$f(x) = x$ coincidono $\qquad f(x+h) = x+h$ coincidono

Se ci fosse stato $x+2h$, allora $f(x+2h) = x+2h$ uguali

Se ci fossero stati a, b allora $f(b) = b$ coincidono, $f(a) = a$ coincidono

N.B.: Si evidenziano questi passaggi, queste sfumature per evitare grossolani errori!

$\boxed{\text{LA DERIVATA DELLA FUNZIONE IDENTITÀ È 1, cioè LA DERIVATA DI } x \text{ È } 1.}$

3) Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si ha, per tutti gli $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2hx - \cancel{x^2}}{h} =$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} 2x$ (il limite della somma è la somma dei limiti) $= 0 + 2x$ (il limite di una costante è la costante stessa, e $2x$ è una costante rispetto ad h) $= \boxed{2x}$. Quindi

$\boxed{\text{LA DERIVATA DI } x^2 \text{ è } 2x}$

4) Sia ora $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 = x \cdot x \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = (\cdot)$$

[N.B.: Si ha: $(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. ESERCIZIO:
Infatti $(x+h)^3 = (x+h)\cdot(x+h)\cdot(x+h) = (x^2+2hx+h^2)\cdot(x+h) =$
$= x^3 + 2hx^2 + h^2x + x^2h + 2h^2x + h^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$]

$$(\cdot) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\cdot(3x^2 + 3xh + h^2)}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3x \cdot \lim_{h \to 0} h + \lim_{h \to 0} (h \cdot h) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \boxed{3x^2}$$

(notiamo che x è una costante, perché il limite si fa rispetto ad h, quindi: il limite di una costante è la costante stessa; la costante può essere portata dentro o fuori dal segno di limite... poi teniamo sempre conto che «il limite della somma è uguale alla somma dei limiti e il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti»)

$\boxed{\text{DERIVATA DI } x^3 \text{ è } 3x^2}$

Più in generale, se n è un intero positivo e se si definisce

$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}$ (n volte) [N.B.: $x^1 = x$ per defin.]

vale a dire $\boxed{x^4} = x \cdot x \cdot x \cdot x = (x \cdot x \cdot x) \cdot x = \boxed{x^3 \cdot x}$,

$\boxed{x^5} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = (x \cdot x \cdot x \cdot x) \cdot x = \boxed{x^4 \cdot x}$, più in generale $\boxed{x^n = x^{n-1} \cdot x}$ $(n \geq 2)$

oppure $\boxed{x^{n+1} = x^n \cdot x}$, si ha che

$\boxed{\text{LA DERIVATA DI } x^n \text{ È } n \cdot x^{n-1}}$

N.B.: Ricordiamo che se x è un numero reale diverso da 0, ed n è un intero positivo, si definisce $\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$

Inoltre, per ogni $x \neq 0$, si pone, per convenzione, $\boxed{x^0 = 1}$

N.B.: Non si definisce 0^0, e neanche 0^k con k negativo.

Vediamo ora le principali $\boxed{\text{REGOLE DI DERIVAZIONE}}$

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$, e siano $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in I e k una costante reale. Allora

$$f \pm g,\ f \cdot g,\ k \cdot f,\ \frac{1}{g},\ \frac{f}{g}$$

sono derivabili in I e per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

i) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

(LA DERIVATA DELLA SOMMA (DIFFERENZA) È UGUALE ALLA SOMMA (DIFFERENZA) DELLE DERIVATE)

ii) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

(LA DERIVATA DEL PRODOTTO, IN GENERALE, <u>NON</u> È UGUALE AL PRODOTTO DELLE DERIVATE! MA È: « <u>DERIVATA DELLA 1ª PER LA 2ª NON DERIVATA</u> $\boxed{\text{PIÙ}}$ <u>LA DERIVATA DELLA 2ª PER LA 1ª NON DERIVATA</u> »

iii) $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$

(LA COSTANTE MOLTIPLICATIVA PUÒ ESSERE PORTATA DENTRO E FUORI IL SEGNO DI DERIVATA)

iv) $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ (quando $g(x) \neq 0$)

v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$

[Le dimostrazioni vengono lasciate come esercizi. Vanno fatte "a livello di esercizio"]

Vediamo la i) per quanto riguarda la somma (il caso della differenza è analogo). Si ha, per ogni $x \in I$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) =$$ (il limite della somma è uguale alla somma dei limiti)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

Vediamo la ii). Si ha, per ogni $x \in I$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

TRUCCO $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

(il limite della somma è uguale alla somma dei limiti)

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right) + \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \right) =$$

(il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) +$$

$$+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} f(x) =$$

$= f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$, in quanto g, essendo derivabile in x, è anche continua in x, e quindi $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, ed inoltre $\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$, in quanto $f(x)$ è costante rispetto alla variabile h, e il limite di una funzione costante è la costante stessa.

Vediamo la iii). Per la ii), si ha, per ogni $x \in I$:

$$(kf)'(x) = k'(x)\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = k\cdot f'(x),$$

in quanto k è una costante reale e la derivata di k è 0

Vediamo la iv). Si ha, per ogni $x \in I$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g}(x+h) - \frac{1}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \left(-\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \right) \right) =$$

$=$ (il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} (-1) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$= g'(x)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot\lim_{h\to 0} g(x)}$$ (in quanto il limite di una costante è uguale alla costante stessa e la funzione $\frac{1}{x}$ è continua, e il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti) =

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)\cdot g(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$ (in quanto g essendo derivabile in x, è anche continua in x, e pertanto $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, e il limite di $g(x)$ è $g(x)$, perché $g(x)$ è una costante rispetto alla variabile h).

Proviamo ora la v). Si ha: $\frac{f}{g} = f\cdot\frac{1}{g}$. Per la ii), si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

$$\underset{\text{(per la iv)}}{=} \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$]

Esempio: Dimostriamo che, $\forall n \in \mathbb{N}$, la derivata di x^n è $n\cdot x^{n-1}$ $(x\in\mathbb{R})$

Indichiamo con $D(x^n)$ la derivata di x^n

In virtù della ii) si ha:

$$D(x^3) = D(x^2\cdot x) = [D(x^2)]\cdot x + x^2\cdot D(x) = 2x\cdot x + x^2\cdot 1 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$$

Nel caso generale, applichiamo il cosiddetto

PRINCIPIO DI INDUZIONE,

cioè supponiamo che il risultato sia vero per $n-1$ e dimostriamo il risultato per n, ricordando che $x^n = x^{n-1} \cdot x$.

Supponiamo dunque che $\boxed{D(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2}}$. Si ha, applicando la regola ii):

$$D(x^n) = D(x^{n-1} \cdot x) = [D(x^{n-1})] \cdot x + x^{n-1} \cdot D(x) =$$

$$(n-1) \cdot x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} = (n-1)\, x^{n-2} \cdot x^1 + x^{n-1} =$$

$$= (n-1) \cdot x^{n-2+1} + x^{n-1} = (n-1)x^{n-1} + x^{n-1} =$$

(proprietà distributiva)

$$= (n-1+1) \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

e quindi l'asserto è provato.

Esempio: Proviamo che $\boxed{D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)}$ (+)

Per la iv), si ha: $D\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{D(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$, come volevasi dimostrare.

La (+) si scrive anche $\boxed{D(x^{-1}) = -x^{-2}}$, $x \neq 0$.

Ora, utilizzando la iv), e tenendo conto che $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, dimostriamo che $\boxed{D(x^{-n}) = -n \cdot x^{-n-1}}$, ossia $\boxed{D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}}$. Per la iv), si ha

$$D\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{D(x^n)}{(x^n)^2} = -\frac{n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} = -n\, x^{n-1} \cdot x^{-2n} =$$ (proprietà delle potenze) $$= -n\, x^{n-1-2n} = -n\, x^{-n-1} = -n \cdot \frac{1}{x^{n+1}},$$

come volevasi dimostrare.

Esempi/esercizi:

1) $D\left(8x^2+5x+6\right)$.

Teniamo conto che la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate, che la derivata di una costante è 0 e che la costante moltiplicativa può essere portata dentro o fuori il segno di derivata. Si ha:

$$\boxed{D\left(8x^2+5x+6\right)} = D(8x^2)+D(5x)+D(6) =$$
$$= 8\,D(x^2)+5D(x)+0 = 8\cdot 2x+5\cdot 1 = \boxed{16x+5}$$

2) $D\left(\dfrac{2+x}{3x}\right)$

Naturalmente, l'espressione scritta qui sopra ha senso per $x\neq 0$, in quanto non si può dividere per 0. Per $x\neq 0$, applicando la formula di derivazione del quoziente, si ha:

$$D\left(\frac{2+x}{3x}\right) = \frac{D(2+x)\cdot 3x-(2+x)\cdot D(3x)}{(3x)^2} =$$
$$= \frac{[\overset{0}{D(2)}+\overset{1}{D(x)}]\cdot 3x-(2+x)\cdot[3\cdot\overset{1}{D(x)}]}{9x^2} = \frac{\cancel{3}x-(2+x)\cdot\cancel{3}}{\underset{3}{\cancel{9}}x^2} =$$
$$= \frac{x-(2+x)}{3x^2} = \frac{\cancel{x}-2-\cancel{x}}{3x^2} = -\frac{2}{3x^2}$$

Come era stato detto prima, limiti e derivate sono due concetti che sono molto collegati fra loro, e sono - direi - quasi "un tutt'uno". La Matematica non deve essere fatta "a compartimenti stagni", nel senso: prima l'argomento X, poi l'argomento Y... Perché quando si studia un argomento nuovo di Matematica ci sono sempre richiami con gli argomenti precedenti. Ora, che cosa succede con i limiti e le derivate? Che in alcuni casi può sembrare difficile risolvere un limite nei casi delle forme indeterminate

$$\frac{0}{0}, \frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}, (+\infty)+(-\infty), (-\infty)+(+\infty).$$

Per le forme $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ viene in aiuto una regola (regola de l'Hôpital o teorema de l'Hôpital) che permette di calcolare i limiti con l'aiuto delle derivate; le forme $(+\infty)+(-\infty)$ e $(-\infty)+(+\infty)$ in generale si riconducono alla forma $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ con qualche "trucchetto".

TEOREMA DE L'HÔPITAL NELLA FORMA $\frac{0}{0}$

Siano: I un insieme di tipo I (= intervallo o semiretta o tutto $\mathbb{R}$); $f, g: I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in I; $x_0 \in I$ tale che $\boxed{f(x_0) = g(x_0) = 0}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I, x \neq x_0$.

Se esiste il limite $\ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (numero reale oppure $+\infty$ oppure $-\infty$), allora si ha che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ (lo stesso valore).

N.B.: Un risultato analogo vale anche per la forma $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Esempio: 1) Dimostriamo, con la regola de l'Hôpital, che

$$L_1 = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-9x+18} = \frac{1}{3}$$

dove L_1 è il limite a pag. 25 di questi appunti. A pag. 25 abbiamo visto che si tratta di una forma del tipo $\frac{0}{0}$. Siano $f(x) = x^2-7x+12$, $g(x) = x^2-9x+18$. Si ha

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{D(x^2-7x+12)}{D(x^2-9x+18)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{D(x^2)-D(7x)+D(12)^{=0}}{D(x^2)-D(9x)+\underset{0}{\underset{\shortparallel}{D(18)}}} = \lim_{x \to 3} \frac{2x-7\overset{1}{\overset{\shortparallel}{D(x)}}}{2x-9\underset{1}{\underset{\shortparallel}{D(x)}}} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{2x-7}{2x-9} = \frac{2 \cdot 3-7}{2 \cdot 3-9} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

2) Proviamo, con la regola de l'Hôpital, che

$$l_{13} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2-7x+29}{4x-2x^2-11} = -\frac{3}{2}$$

Si tratta di una forma del tipo $\frac{+\infty}{-\infty}$: infatti, sia al numeratore che al denominatore, "vince il grado più grande", in quanto (diciamo, per il principio di sostituzione degli infiniti)

$$\lim_{x \to \pm\infty} (3x^2-7x+29) = \lim_{x \to \pm\infty} 3x^2 = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} (4x-2x^2-11) = \lim_{x \to \pm\infty} -2x^2 = (-2) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Possiamo applicare il teorema de l'Hôpital. Si ha

$$l_{13} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{D(3x^2-7x+29)}{D(4x-2x^2-11)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{D(3x^2)-D(7x)+\overset{0}{\overset{\shortparallel}{D(29)}}}{D(4x)-D(2x^2)-\underset{0}{\underset{\shortparallel}{D(11)}}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3D(x^2) - 7\overset{1}{D(x)}}{4\underbrace{D(x)}_{=1} - 2D(x^2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x-7}{4-4x}$$

che è della forma $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ (perché $\lim_{x\to\pm\infty}(6x-7) =$
$= \lim_{x\to\pm\infty} 6x = 6\cdot(\pm\infty) = \pm\infty$, mentre $\lim_{x\to\pm\infty}(4-4x) =$
$= \lim_{x\to\pm\infty} -4x = (-4)\cdot(\pm\infty) = \mp\infty$). Allora possiamo applicare un' altra volta il teorema de l'Hôpital. Infatti osserviamo che il teorema de l'Hôpital può essere applicato più di una volta nello stesso esercizio (anche se notiamo che comunque, per il principio di sostituzione degli infiniti, si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x-7}{4-4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\overset{3}{\cancel{6}}x}{-\underset{2}{\cancel{4}}x} = -\frac{3}{2}$).
Con de l' Hôpital, si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x-7}{4-4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{D(6x-7)}{D(4-4x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{D(6x) - \overset{=0}{D(7)}}{\underbrace{D(4)}_{=0} - D(4x)} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6\cdot \overset{=1}{D(x)}}{-4\cdot \underbrace{D(x)}_{=1}} = \frac{6}{-4} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}.$$ Da qui e da ciò che è stato fatto nell' ultima riga della pagina precedente e nella prima riga di questa pagina, si deduce che $l_{13} = -\frac{3}{2}$, come volevamo provare.

N.B.: Ci sono situazioni in cui si possono svolgere i limiti con o senza la regola de l' Hôpital; ci sono altre situazioni in cui la regola de l' Hôpital "salva la situazione", oppure permette di calcolare i limiti molto più velocemente che con altre tecniche; e ci sono altre (rare) situazioni in cui il teorema de l' Hôpital "peggiora la situazione". Allora, la cosa migliore è fare tanta pratica... Ma ora teniamo conto che il nostro scopo è lo studio dei fenomeni che si osservano nelle scienze, quindi lo studio di funzione, che comprende limiti, derivate e disequazioni. Nello studio di funzione si fa tutto!!

STUDIO DI UNA FUNZIONE

Nello studio dei fenomeni osservati in svariatissime branche delle Scienze, riveste fondamentale importanza, partendo dalla legge (che può essere, per esempio, osservata sperimentalmente), riuscire a ricavare le proprietà qualitative principali ed il grafico della funzione che la rappresenta.

L'analisi di questo procedimento si chiama <u>studio della funzione</u>. Per fare ciò, si studiano:

- il campo di esistenza o dominio (A_f), o campo di definizione, il segno della funzione, le intersezioni con l'asse delle x (cioè i punti in cui f si annulla) e con l'asse delle y
- gli intervalli di continuità e di derivabilità (qui gli intervalli possono essere anche semirette)
- i limiti agli estremi degli intervalli di esistenza di f (di cui A_f è unione)
- gli intervalli in cui f è crescente, decrescente, costante e i punti di massimo e minimo (studiando il segno della derivata (o derivata prima))
- gli intervalli di convessità e concavità di f (studiando il segno della derivata seconda)
- l'esistenza e la posizione degli asintoti.

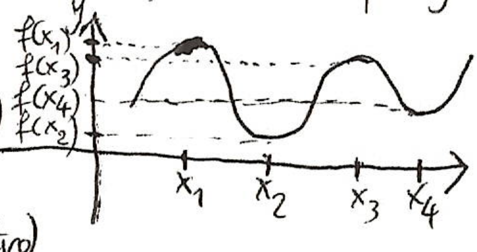
Introduciamo ora i concetti di <u>massimo</u> e <u>minimo</u>, <u>asintoto</u>, <u>concavità</u>, <u>convessità</u>, (punto di) <u>flesso</u>, che vedremo più da vicino negli esercizi.

MASSIMI E MINIMI

DEFINIZIONE: Sia $f: I \to \mathbb{R}$, ove I è un intervallo o una semiretta o tutto $\mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in I$ si dice di massimo (rispettivamente: minimo) relativo per f se esiste un numero reale positivo δ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ per ogni $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Un punto $x_0 \in I$ si dice di massimo (risp. minimo) assoluto per f se $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ per ogni $x \in I$

x_1 è un punto di massimo assoluto (e quindi anche relativo)

x_2 è un punto di minimo assoluto (e quindi anche relativo)



x_3 è un punto di massimo relativo, ma non assoluto

x_4 è un punto di minimo relativo, ma non assoluto

Per analizzare la crescenza e la decrescenza di una funzione in un certo intervallo, se ne studia il segno della derivata, e si applica il

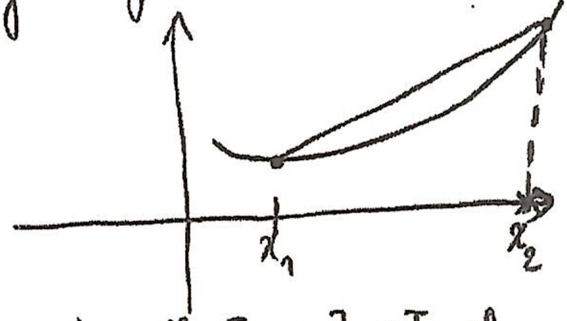
$\boxed{\text{TEST DI MONOTONIA}}$: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$. Se $f'(x) > 0$ in $]a,b[$, allora f è strettamente crescente in $[a,b]$; se $f'(x) < 0$ in $]a,b[$, allora f è strettamente decrescente in $[a,b]$; se $f'(x) \geq 0$ in $]a,b[$, allora f è non decrescente in $[a,b]$; se $f'(x) \leq 0$ in $]a,b[$, allora f è non crescente in $[a,b]$; se $f'(x) = 0$ in $]a,b[$, allora f è costante in $[a,b]$.

CONCAVITÀ, CONVESSITÀ, FLESSI

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, ove I è un intervallo chiuso o aperto o semiaperto, limitato o illimitato di $\mathbb{R}$, o tutto $\mathbb{R}$. Si dice che f è <u>convessa</u> se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, e $\forall t \in [0,1]$, si ha:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t\, f(x_1) + (1-t)\, f(x_2).$$

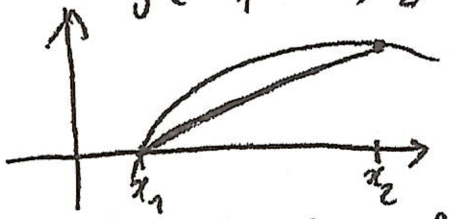
Il significato geometrico della convessità è il seguente:



Per ogni intervallo $[x_1, x_2] \subset I$, il grafico di f, quando x varia in $[x_1, x_2]$, sta al di <u>sotto</u> del segmento che congiunge i due punti $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$.

Si dice che f è <u>concava</u> se per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$, e $\forall t \in [0,1]$, si ha:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq t\, f(x_1) + (1-t)\, f(x_2).$$



Significato geometrico della concavità: Per ogni intervallo $[x_1, x_2] \subset I$, il grafico di f, quando x varia in $[x_1, x_2]$, sta al di <u>sopra</u> del segmento congiungente i due punti $(x_1, f(x_1))$ ed $(x_2, f(x_2))$.

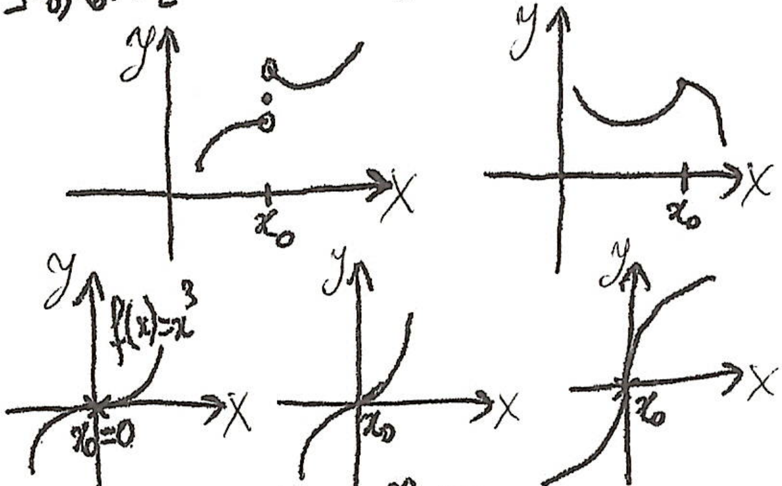
Sussiste il seguente risultato, molto importante negli esercizi nello studio di funzione:

PROPOSIZIONE: Se $f: I \to \mathbb{R}$ ammette derivata seconda in I, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa (rispettivamente concava) è che

$$\boxed{f''(x) \geq 0} \quad \forall x \in I \; (\text{rispettivamente } \boxed{f''(x) \leq 0} \; \forall x \in I).$$

Diamo ora la definizione di punto di FLESSO per una funzione $f: I \to \mathbb{R}$.

Sia x_0 interno ad I, ove I è sempre come sopra (intervallo o semiretta o tutto $\mathbb{R}$). Il punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ del grafico di f si dice punto di flesso se esiste $\delta > 0$ per cui f è convessa in $]x_0, x_0+\delta[$ e concava in $]x_0-\delta, x_0[$, o viceversa.



Esempi di punti di flesso.

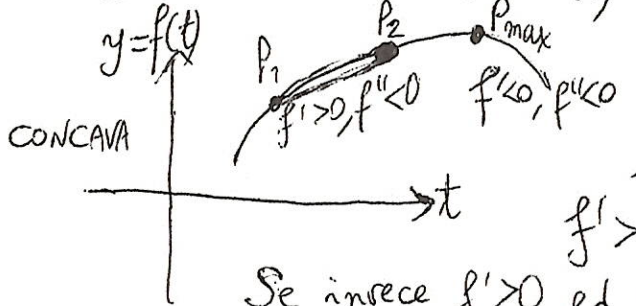
In generale, un punto di flesso non è detto che sia sempre un punto di continuità, e un punto di flesso che è contemporaneamente punto di continuità non è detto che sia un punto di derivabilità.

DERIVATA SECONDA:

CONVESSITÀ, CONCAVITÀ E ... CORONAVIRUS

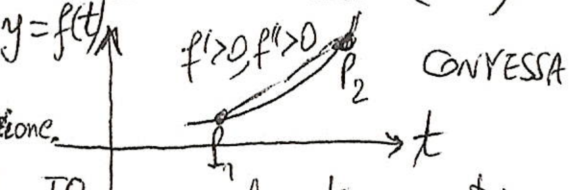
PRESENTAZIONE "INTUITIVA"

Nello studio dei fenomeni, la derivata (o derivata prima) f' di una funzione f esprime di quanto cresce (o decresce) la funzione f con la quale descriviamo il nostro fenomeno, cioè l'evoluzione, il "divenire" del fenomeno. Ma molto spesso ci interessa anche se il "tasso" con cui si evolve il fenomeno cresce o decresce, cioè se la derivata f' cresce o decresce. Per esempio, se t è la variabile tempo, $f(t)$ esprime l'andamento dei prezzi di una certa merce (al variare del tempo) ed f' esprime il tasso di inflazione o di deflazione, è molto importante stabilire se f' cresce o decresce: per esempio, se ci troviamo in una fase di inflazione (cioè di crescita dei prezzi), è importantissimo vedere se l'inflazione stessa (cioè f') cresce o decresce: nel primo caso, i prezzi tendono ad aumentare sempre di più e in un modo sempre più veloce, mentre nel secondo caso i prezzi aumentano, ma con velocità ridotta rispetto a quella con cui erano aumentati qualche tempo fa. Supponiamo che f ammetta derivata seconda (la derivata seconda è la derivata della derivata). Nel primo caso (l'inflazione aumenta, cioè f' è crescente), si ha che $f'' \geq 0$ mentre nel secondo caso (l'inflazione diminuisce, cioè f' è decrescente), ci troviamo di fronte a $f'' \leq 0$. Stessa cosa, se come $f(t)$ si prende il numero di individui affetti da coronavirus. Se tendono ad aumentare ($f'>0$), ma $f''<0$, allora f' diminuisce, e quindi l'incremento dei casi, pur essendo positivo, diminuisce. In questo caso abbiamo $f''<0$ e si può sperare che, ad un certo punto, l'incremento dei casi arrivi a 0, cioè f' diventi 0, e quindi la situazione si stabilizzi (cioè f abbia un "picco", ossia un punto di massimo), per poi migliorare se f' diventa negativo, perché in tal caso f (cioè il numero dei casi) diminuisce. In questo caso, geometricamente



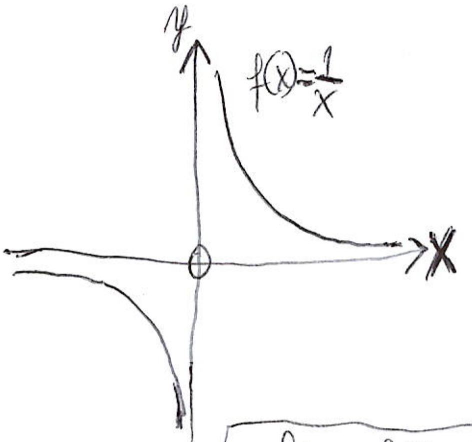
parlando, il fatto che $f''<0$ corrisponde al fatto che f è <u>CONCAVA</u>, cioè f rivolge la concavità verso il <u>basso</u> ($\cap$). Quindi $f'>0$, ma $f''<0$ vuol dire: <u>NON CI ALLARMIAMO!!!</u>

Se invece $f'>0$ ed $f''>0$, allora vuol dire che sia f sia f' crescono: quindi non solo il numero degli individui malati aumenta, ma aumenta anche la <u>velocità</u> con cui gli individui malati aumentano. Il fatto che $f''>0$, da un punto di vista geometrico, corrisponde al fatto che f è <u>CONVESSA</u>, cioè f rivolge la concavità verso l'<u>alto</u> ($\cup$).
Quindi $f'>0$ ed $f''>0$ significano:
<u>ATTENZIONE!!</u> Il discorso è analogo con l'andamento dei prezzi e l'inflazione.



Sia I un intervallo, o una semiretta, o tutto $\mathbb{R}$. Il significato geometrico della convessità [concavità] di una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ vuol dire: Comunque presi due punti P_1 e P_2 appartenenti al grafico di f, allora la porzione, la parte del grafico di f tra P_1 e P_2 sta al di sotto [sopra] del segmento P_1P_2 congiungente P_1 e P_2, come si vede dalle due figure.
Per le definizioni di convessità e concavità dal punto di vista "analitico", cioè per le definizioni "classiche", "tradizionali", rimandiamo alle pagine 52 e 53 cioè di questi appunti

ASINTOTI DI UNA FUNZIONE (ORIZZONTALI, VERTICALI E OBLIQUI)



Sia $J \subset \mathbb{R}$ unione finita e disgiunta di intervalli e/o semirette, (oppure tutto $\mathbb{R}$).
Si dice che una retta orizzontale di equazione $\boxed{y=k}$ (con k numero reale) è un ASINTOTO ORIZZONTALE per $f: J \to \mathbb{R}$ se

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=k \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=k}$$

(purché abbia senso fare questi limiti). Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ oppure $= -\infty$ oppure non esiste, allora automaticamente non c'è l'asintoto orizzontale dal lato $+\infty$. Un discorso analogo vale anche dal lato $-\infty$.

Esempio: la retta $y=0$, cioè l'asse x, è asintoto orizzontale per la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$ sia dal lato $+\infty$ sia dal lato $-\infty$; è

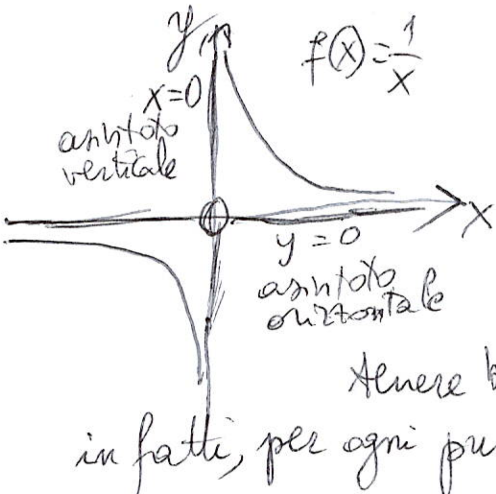
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0.$$

Sia $J \subset \mathbb{R}$ come sopra, e sia $x_0 \in J$, oppure se anche $x_0 \notin J$, x_0 sia tale che ci possiamo avvicinare ad x_0 di quanto vogliamo (anche senza raggiungere necessariamente il punto x_0) rimanendo nell'insieme J (per esempio $J=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ = l'insieme dei numeri reali escluso lo zero $=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$: notiamo che $0 \notin J$, ma ci possiamo avvicinare a 0 di quanto vogliamo rimanendo dentro l'insieme J, anche non raggiungendo lo zero).

Si dice che la retta $\boxed{x=x_0}$ è un asintoto verticale per $f: J \to \mathbb{R}$ se almeno una delle seguenti 4 condizioni è verificata:

(*) $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.

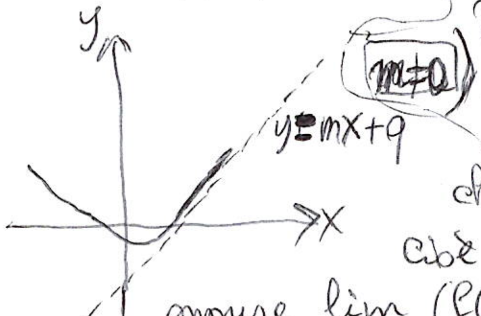
Esempio: siccome $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}=-\infty$, allora la retta $x=0$ (l'asse y) è asintoto verticale per la funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, sia dal lato destro sia dal lato sinistro.



N.B.: Notiamo che una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, DEFINITA e CONTINUA in tutto $\mathbb{R}$, non ha asintoti VERTICALI (questa cosa si deve tenere ben presente nello studio di funzione!): infatti, per ogni punto $x_0\in\mathbb{R}$, si ha $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}}$ (per definizione di continuità di f in x_0) e quindi il valore qui NON PUÒ ESSERE $+\infty$ o $-\infty$, cioè non si può presentare NESSUNA delle 4 situazioni indicate in $(\overset{*}{o})$ riguardanti l'esistenza dell'asintoto verticale.

Siccome abbiamo tre tipi di retta (orizzontale, verticale, obliqua), allora avremo tre tipi di asintoti (orizzontali, verticali, obliqui). Dire che una retta r è un asintoto per una funzione f vuol dire che "f è asintotica a r", cioè che (da un certo punto in poi) Grf è molto vicina a r, ove Grf è il grafico di f.

Adesso introduciamo il concetto di ASINTOTO OBLIQUO



Dire che la retta $y=mx+q$ (q reale, m reale, $\boxed{m\neq 0}$) è ASINTOTO OBLIQUO per f (per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$) vuol dire che, per $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, $f(x)\cong mx+q$, cioè $f(x)-mx-q\cong 0$, ossia $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx-q)=0$, oppure $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx-q)=0$. Ma allora, per $x\to+\infty$ o $x\to-\infty$, è

$$\frac{f(x)}{x}\simeq\frac{mx+q}{x}=m\frac{x}{x}+\frac{q}{x}=m+\frac{q}{x},$$ e quindi $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}}=m+\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{x}=\boxed{m}$$

perché $\lim_{x\to+\infty}\frac{q}{x}=\frac{q\,(\text{reale})}{+\infty}=0$. Analogamente $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m}$. Inoltre, poiché $f(x)-mx-q\cong 0$, allora $q\cong f(x)-mx$, cioè $\boxed{q=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)}$ o $\boxed{q=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-mx)}$

In virtù delle considerazioni appena fatte alla fine della pagina precedente, ~~po~~ possiamo formulare la definizione ~~di~~ di ASINTOTO OBLIQUO per una funzione $f: J \to \mathbb{R}$, ove J è come nella presentazione dei concetti di asintoto orizzontale e verticale.

Si dice che la retta OBLIQUA $\boxed{y = mx + q}$ (con $q \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$) è un ASINTOTO OBLIQUO per la funzione $f: J \to \mathbb{R}$ dalla parte o dal lato di $+\infty$ (rispettivamente, $-\infty$) se e solo se sono verificate le seguenti 2 proprietà:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ — m è reale, $m \neq 0$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = q$ — q è reale (anche 0)

(rispettivamente,

1') $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ — m è reale, $m \neq 0$

2') $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = q$ — q è reale (anche 0))

Quindi, nella pratica, che cosa si deve fare? Prima, si calcola m. Se $m = 0$, oppure $m = +\infty$, oppure $m = -\infty$, oppure se m non esiste, possiamo già concludere che l'asintoto obliquo non esiste (da quel lato dal quale stiamo calcolando m), e non calcoleremo q. Se invece m è un numero reale diverso da 0, calcoliamo q: se q viene un numero reale (anche 0), allora la retta $y = mx + q$ sarà un asintoto obliquo per la funzione f dal lato in corrispondenza del quale abbiamo calcolato i limiti; se invece $q = +\infty$, oppure $q = -\infty$, oppure q non esiste, allora l'asintoto obliquo (da quel lato) non c'è.

Ora, visto che lo studio di funzione, nella sua globalità, comprende limiti, derivate, disequazioni, ecc., insomma un po' di tutto, allora presenteremo direttamente lo studio di una funzione. Naturalmente continueremo a fare anche esempi/esercizi su limiti, derivate, ..., ecc. ....

ESERCIZIO

Fare lo studio della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

<u>Dominio</u>: Il campo di esistenza è $x \neq -2$, cioè $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.

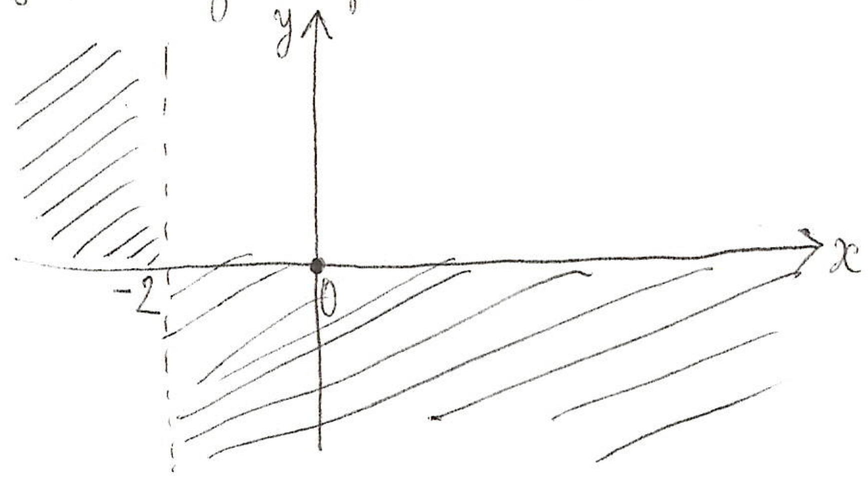
<u>Segno della funzione</u>:

Innanzi tutto, notiamo che $f(0) = 0$.

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore, e quindi ricaviamo il segno della frazione.

		-2		0	
Numeratore	+		+	0	+
Denominatore	−	0	+		+
Frazione $= f(x)$	−	$\nexists$	+	0	+

Da ciò si deduce che $f(x)$ è positivo per $x \in]-2, 0[\cup]0, +\infty[$ ed $f(x)$ è negativo per $x < -2$.



Asintoti: Premettiamo che il campo di esistenza (o dominio) di f è $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$, e quindi bisogna studiare i limiti della funzione f per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$, per $x \to -2^+$ (da destra), per $x \to -2^-$ (da sinistra).

Ricerca di ASINTOTI ORIZZONTALI. Si ha:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x+2} =$ (per il principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Quindi, dal lato $+\infty$, non ci sono asintoti orizzontali.

Analogamente, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} =$
$= \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$. Non ci sono asintoti orizzontali neanche dal lato $-\infty$.

Vediamo ora gli asintoti obliqui. Se $y = mx + q$ è un asintoto obliquo per f, allora $f(x) \simeq mx + q$ (vuol dire che per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$, $f(x)$ è "quasi uguale" a $mx+q$, e quindi $\frac{f(x)}{x} \simeq m + \frac{q}{x}$, cioè $\lim_{x \to +\infty}$ (oppure $\lim_{x \to -\infty}$) $\frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty}$ (oppure $\lim_{x \to -\infty}$) $\left(m + \frac{q}{x}\right) =$
$= m + \frac{q}{+\infty} = m + 0 = m$. Pertanto si deve avere

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}}, \quad \text{oppure} \quad \boxed{m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}},$$

ove m è un numero reale diverso da 0, in quanto la retta $y = mx + q$ è OBLIQUA, cioè né verticale né orizzontale.

Inoltre, da $f(x) \cong mx+q$ si ricava $q \cong f(x)-mx$, da cui

$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x)-mx)$, oppure $q = \lim_{x \to -\infty} (f(x)-mx)$

Adesso, calcoliamo m e q. Dal lato $+\infty$, si ha:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x(x+2)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} =$$

(per il principio di sostituzione degli infiniti) $= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1.$

Dal lato $-\infty$, si ha:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = (\text{come prima}) \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} 1 = 1.$$

Vediamo ora q. Dal lato $+\infty$, si ha

$$q = \lim_{x \to +\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x+2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2x}{x+2} =$$

$=$ (per il principio di sostituzione degli infiniti)

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2)\frac{x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (-2) = -2.$$

Analogamente, dal lato $-\infty$, si ha

$$q = \lim_{x \to -\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{2x}{x+2} = (\text{come prima})$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-2) \cdot \frac{x}{x} = -2.$$

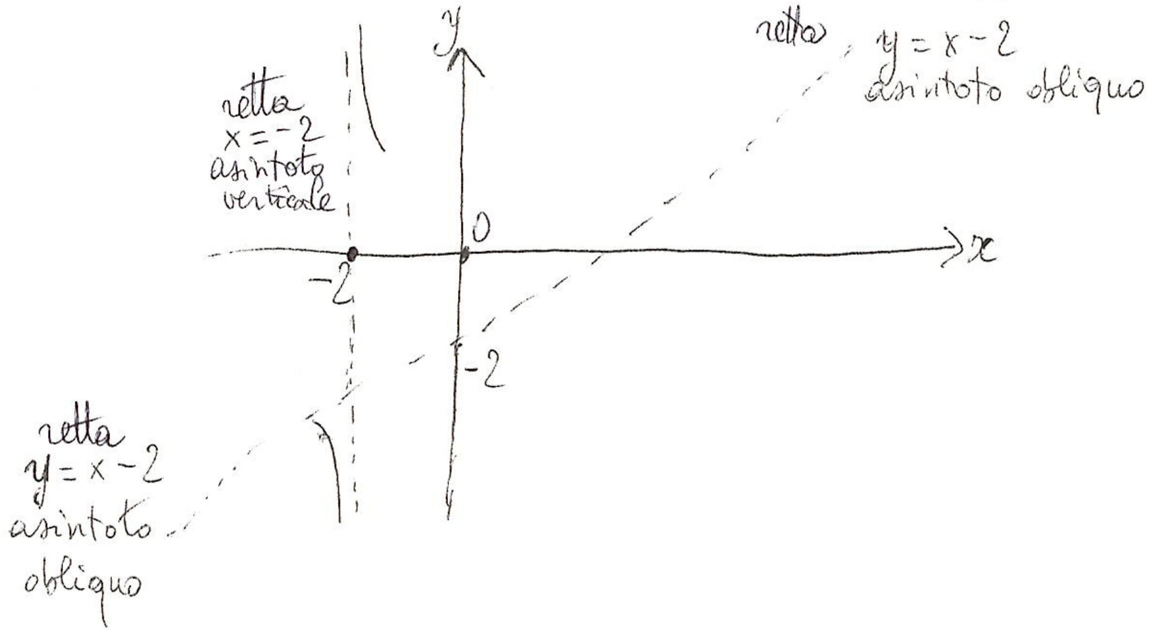
Pertanto la retta $\boxed{y = x-2}$ è un ASINTOTO OBLIQUO per f, sia dal lato $+\infty$ che dal lato $-\infty$.

Vediamo ora gli asintoti verticali. Si ha:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{0^-} = -\infty.$$

Pertanto la retta $x=-2$ è un asintoto verticale per f sia dal lato destro che dal lato sinistro.



<u>Derivata</u> (cioè derivata prima). Ricordiamo che

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}\quad,\ x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[\,.$$

Si ha: $f'(x)=\dfrac{[D(x^2)]\cdot(x+2)-[D(x+2)]\cdot x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{2x\cdot(x+2)-1\cdot x^2}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

$(x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[)$

Studiamo il segno della derivata prima, tenendo conto che nel punto -2 non è definita (non è definita neanche la funzione f)

		-4		-2		0	
x	$-$		$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$		$+$
$(x+2)^2$	$+$		$+$	$\nexists$	$+$		$+$
$f'(x)=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-2	$\searrow$	0	$\nearrow$

Pertanto, per il cosiddetto "test di monotonia", f è:

strettamente crescente in $]-\infty,-4]$

strettamente decrescente in $[-4,-2[$

strettamente decrescente in $]-2,0]$

strettamente crescente in $[0,+\infty[$

Il punto -4 è un punto di massimo per f, mentre il punto 0 è un punto di minimo per f.

(Notiamo che sono punti di massimo e di minimo relativo, non assoluto, perché $\lim_{x\to-2^+} f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$)

Derivata seconda. Ricordiamo che la derivata seconda è la derivata (prima) della derivata (prima), e che $f'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$ $(x\neq -2)$. Quindi, per $x\neq-2$, si ha

$$f''(x)=D\left(\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}\right)=\frac{[D(x^2+4x)]\cdot(x+2)^2-[D((x+2)^2)]\cdot(x^2+4x)}{[(x+2)^2]^2}=$$

$$=\frac{(2x+4)\cdot(x^2+4x+4)-[D(x^2+4x+4)]\cdot(x^2+4x)}{(x+2)^{2\cdot 2}}=$$ (v. anche proprietà delle potenze...)

$$=\frac{(2x+4)\cdot(x^2+4x+4)-(2x+4)(x^2+4x)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(2x+4)\cdot(\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{4x})}{(x+2)^4}=\frac{2\cdot(x+2)\cdot 4}{(x+2)^4}=\frac{8}{(x+2)^3}.$$

Pertanto $f''(x)=\dfrac{8}{(x+2)^3}$ per ogni $x\in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,+\infty[$.

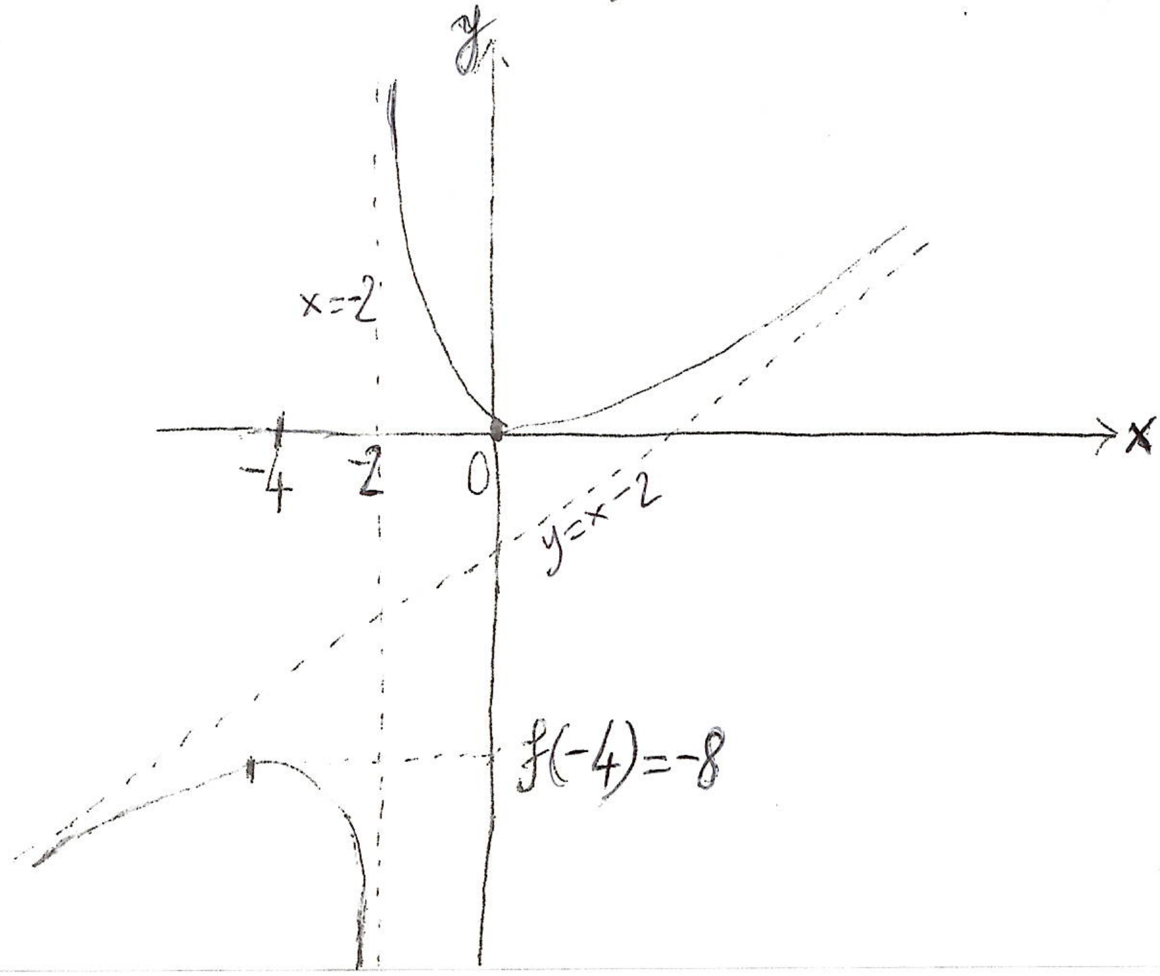
Vediamo il segno della derivata seconda. Si ha:

$f''(x)>0$ se e solo se $(x+2)^3>0 \iff x+2>0 \iff x>-2$.

Inoltre, analogamente, $f''(x)<0$ se e solo se $(x+2)^3<0$ se e solo se $x+2<0$ se e solo se $x<-2$. Quindi:

PER $x\in\,]-\infty,-2[$, f è CONCAVA ($\frown$);

PER $x\in\,]-2,+\infty[$, f è CONVESSA ($\smile$).



y
x
x=-2
-4
-2
0
y=x-2
f(-4)=-8

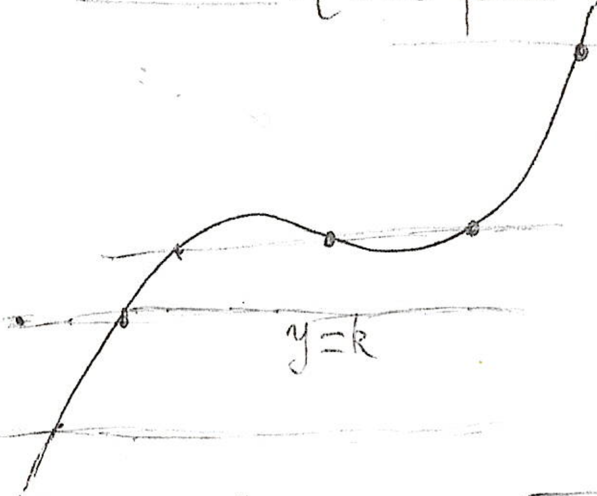
Adesso, sostanzialmente, siamo in grado di fare lo studio di funzione nel caso in cui la nostra funzione (vale a dire "il modello (matematico) con il quale il fenomeno che studiamo viene descritto") si presenta come rapporto di polinomi. Ma ci sono tanti altri tipi di funzioni che si incontrano in tantissime branche delle Scienze. Quindi, nella nostra "modellizzazione", tratteremo (anche) altri tipi di funzioni. Per esempio, le funzioni cosiddette "esponenziali" hanno svariate applicazioni nella dinamica e crescita/decrescita delle popolazioni; i logaritmi hanno tantissime applicazioni in Fisica, in Chimica e anche in Musica, nella costruzione di scale musicali (p.es. della scala cromatica); tra le innumerevoli applicazioni della trigonometria citiamo quelle in Fisica (per dare solo un esempio, basti pensare ai moti armonici e al pendolo.

Per trattare funzioni come quelle sopra citate, che NON sono rapporti tra due polinomi, presenteremo altre proprietà delle funzioni (in generale) che ci serviranno per studiare vari tipi di funzioni più da vicino (potenze, esponenziale, logaritmi, funzioni trigonometriche)

INIETTIVITÀ — 67 — E SURIETTIVITÀ

Una funzione $f: A \longrightarrow B$ si dice $\boxed{\text{SURIETTIVA}}$ se $\boxed{f(A)=B}$ ove $f(A)=\{b : \text{esiste } a \in A \text{ tale che } f(a)=b\}$ = CODOMINIO di f, cioè "se assume tutti i valori di B", ossia se ogni $y \in B$ è assunto dalla funzione f (da qualche parte), cioè se per ogni $y \in B$ esiste almeno un $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Come si fa a vedere, nella pratica, se una funzione è suriettiva? (Una funzione a valori reali)

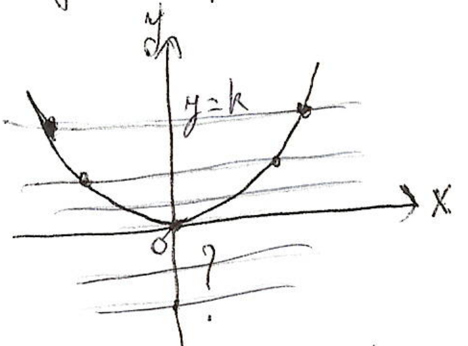


Si tracciano tutte le rette orizzontali del tipo $y=k$, ove k varia nell'insieme dei valori di f (cioè in B)

La funzione f in figura, ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$, è suriettiva, perché $\boxed{\text{comunque}}$ si traccia una retta orizzontale del tipo $\boxed{y=k}$ come detto sopra, questa retta incontra il grafico di f in almeno un punto (può succedere anche di avere 3 punti di intersezione, come nella figura), e quindi f assume tutti i valori di $\mathbb{R}$ (cioè è suriettiva).

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
definita ponendo $f(x) = x^2$. È suriettiva, o no?



Tracciamo le rette orizzontali
del tipo $y=k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$
(che è l' <u>insieme</u> <u>dei</u> <u>valori</u>)
Per $k>0$, la retta $y=k$ interseca
il grafico di f in due punti, e la retta $y=0$, cioè l'asse x,
interseca il grafico di f in un punto (l'origine). Ma per
$k<0$, NON ci sono intersezioni della retta $y=k$ con
il grafico della funzione. Quindi, considerata come
funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f <u>non è</u> suriettiva. Notiamo
che f assume tutti i valori positivi e lo zero, mentre
f non assume mai valori negativi. Pertanto il
<u>codominio</u> di f è $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$
Quindi, considerata come funzione $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$,
$f(x) = x^2$ È <u>SURIETTIVA</u>, perché ogni retta
orizzontale del tipo $y=k$, al variare di $k \in [0, +\infty[$
(questa volta), interseca il grafico di f in almeno un punto.
Quindi, considerando una <u>qualunque</u> funzione $f: A \to B$,
se la consideriamo come $f: A \to f(A)$ (ove $f(A)$ è il
CODOMINIO di f), questa funzione f <u>DIVENTA</u>
<u>AUTOMATICAMENTE</u> <u>SURIETTIVA</u>. Infatti, per definizione,
$f(A) = \{y \in B$ tali che esiste <u>almeno</u> un punto $x \in A$ tale che $f(x) = y\}$.
Quindi <u>ogni</u> funzione del mondo f "diventa" <u>suriettiva</u> se è vista come $f: A \to f(A)$.

Adesso introduciamo il concetto di funzione <u>INIETTIVA</u> e quello di funzione <u>NON-INIETTIVA</u>. Una <u>funzione</u> $f: A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> in A se non esistono due punti <u>distinti</u> $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$, mentre $f: A \to B$ si dice <u>non-iniettiva</u> in A se esistono almeno due punti <u>distinti</u> $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$. Notiamo che (senza dimostrazione ....) il concetto di iniettività può essere equivalentemente formulato nel seguente modo:

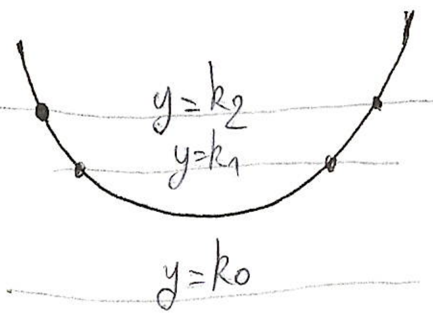
Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> in A se, comunque presi due punti $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$, si ha che $f(a_1) \neq f(a_2)$; oppure:

Una funzione $f: A \to B$ si dice <u>iniettiva</u> in A se, comunque presi due punti $a_1, a_2 \in A$ con $f(a_1) = f(a_2)$, si ha che $a_1 = a_2$.

Ora, come si fa a vedere nella pratica – nel caso di funzioni a <u>valori reali</u> – se una funzione è iniettiva oppure è non-iniettiva?

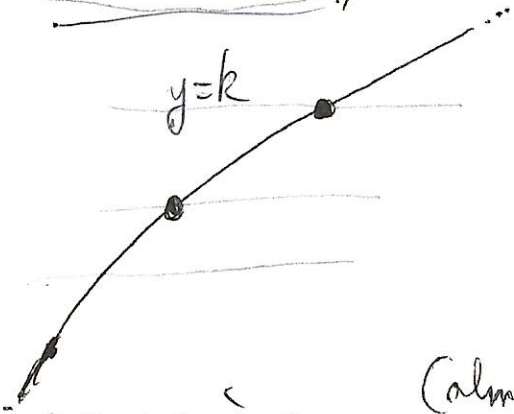
Si tracciano tutte le rette orizzontali del tipo $y=k$, ove k varia nell'insieme dei valori di f (cioè in B).

Se per ogni $k \in B$ la retta $y=k$ o non incontra il grafico di f oppure lo incontra in un solo punto, allora f è iniettiva. Se esiste almeno un $k \in B$ tale che la retta $y=k$ incontra il grafico di f in almeno due punti, allora f è non-iniettiva.



La funzione in figura, vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è non-iniettiva. Infatti le rette $y=k_1$ ed $y=k_2$ incontrano il grafico della curva $y=f(x)$ in 2 punti. Inoltre f non è neanche suriettiva, in quanto la retta $y=k_0$ non incontra il grafico della curva $y=f(x)$ in nessun punto.

Quindi SE UNA FUNZIONE È NON INIETTIVA, NON È DETTO CHE SIA SURIETTIVA.
LA NON INIETTIVITÀ E LA SURIETTIVITÀ NON SONO LA STESSA COSA "Suriettiva" non vuol dire "non-iniettiva"



La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva, perché ogni retta $y=k$ incontra il grafico della curva $y=f(x)$ in (al più) un punto, ed è anche suriettiva, in quanto ogni retta $y=k$ incontra il grafico della curva $y=f(x)$ in (almeno) un punto.

INIETTIVITÀ E SURIETTIVITÀ "NON SONO PARENTI" (!!)

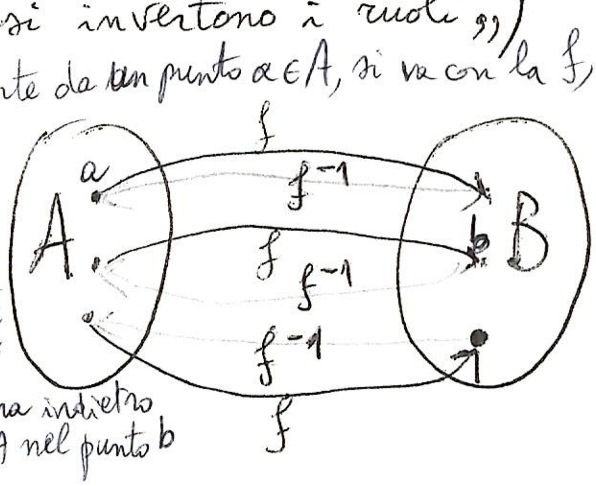
Si dice che una funzione $f: A \to B$ è $\boxed{\text{BIIETTIVA}}$ se è allo stesso tempo sia INIETTIVA sia SURIETTIVA.

Se $f: A \to B$ è biiettiva, allora si può vedere che esiste un'unica funzione $f^{-1}: B \to A$ tale che $\boxed{f^{-1}(f(a)) = a}$ per ogni $a \in A$ e $\boxed{f(f^{-1}(b)) = b}$ per ogni $b \in B$. La funzione $f^{-1}: B \to A$ si chiama FUNZIONE INVERSA di f, ed esiste se e solo se f è BIIETTIVA. Notiamo che si può vedere che ANCHE LA FUNZIONE INVERSA f^{-1} È BIIETTIVA (senza dim.)

[N.B.: Nel Calcolo Combinatorio, le funzioni iniettive $f: \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ sono esattamente le disposizioni semplici di n oggetti a k a k]. [Le funzioni biiettive si identificano con le PERMUTAZIONI]

N.B.: Il dominio di f^{-1} coincide con il codominio di f (cioè B). Il codominio di f^{-1} coincide con il dominio (o campo di esistenza) di f, ed è A. (Cioè, il dominio e il codominio "si scambiano i ruoli", "si invertono i ruoli")

$\boxed{f^{-1}(f(a)) = a}$: si parte da un punto $a \in A$, si va con la f, si ritorna indietro con la f^{-1}: CI SI RITROVA NEL PUNTO a



$\boxed{f(f^{-1}(b)) = b}$: si parte da un punto $b \in B$, si va con la f^{-1}, si torna indietro con la f: CI SI RITROVA nel punto b

f^{-1} = FUNZIONE INVERSA

Sia $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si dice che $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>crescente</u> (oppure <u>strettamente crescente</u>) se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, si ha: $\boxed{f(x_1) < f(x_2)}$.

Si dice che $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>nondecrescente</u> se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, si ha:

$$\boxed{f(x_1) \leq f(x_2)}.$$

Si dice che $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>decrescente</u> (oppure <u>strettamente decrescente</u>) se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, è

$$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}.$$

Si dice che $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>noncrescente</u> se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, si ha

$$\boxed{f(x_1) \geq f(x_2)}.$$

Si dice che $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>costante</u> se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ si ha $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$, cioè se esiste un numero reale k tale che $\boxed{f(x) = k \quad \text{per ogni } x \in A}$.

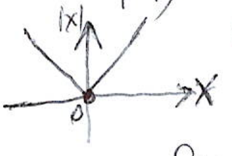
N.B.: Una funzione <u>STRETTAMENTE CRESCENTE</u> (o <u>STRETTAMENTE DECRESCENTE</u>) è <u>INIETTIVA</u> (il viceversa non è detto)

Siano infatti $x_1 \neq x_2$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre $x_1 < x_2$ (cioè indichiamo con x_1 il più piccolo, e con x_2 il più grande). Se f è strettamente crescente, avremo $f(x_1) < f(x_2)$, mentre se f è strettamente decrescente, si ha $f(x_1) > f(x_2)$. In ogni caso, si ottiene $f(x_1) \neq f(x_2)$. Quindi, f è iniettiva. [Esercizio: Il viceversa, in generale, non è vero (basta prendere, ad esempio, $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ definita ponendo $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$. Si ha: $f(1) < f(2)$, ma $f(1) > f(3)$. Quindi f è addirittura <u>biiettiva</u>, ma non è né crescente né decrescente).]

Richiamo della definizione di VALORE ASSOLUTO.

Per ogni numero reale x, si chiama <u>valore</u> <u>assoluto</u> di x o <u>modulo</u> di x (e si indica con $|x|$) la funzione definita da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$



(È <u>CONTINUA</u> in tutto $\mathbb{R}$, ma 0 è un punto di non-derivabilità "punto angoloso")

N.B.: (Esempio): Si ha $|x-5| = \begin{cases} x-5, & \text{se } x-5 \geq 0, \text{ cioè } x \geq 5 \\ 5-x, & \text{se } x-5 \leq 0, \text{ cioè } x \leq 5. \end{cases}$

Infatti, $|t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$, e l'espressione di $|x-5|$ si ottiene sostituendo t con $x-5$ IN TUTTO E PER TUTTO.

Sarebbe <u>un errore grave</u>, scrivere $\begin{cases} x-5 & \text{se } x \geq 0 \\ x-5 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

(ATTENZIONE!!!)

Vediamo ora la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita ponendo

$f(x) = x^2$

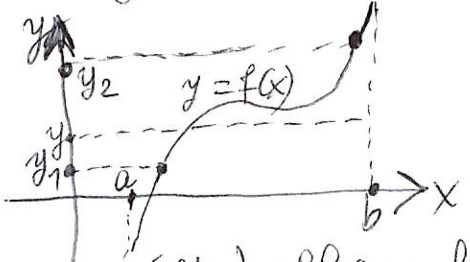
Il campo di definizione (o dominio) di f è tutto $\mathbb{R}$, cioè tutto l'insieme dei numeri reali.

Ora il nostro scopo è: fare vedere che il codominio di f è tutta la semiretta $[0, +\infty[$. Notiamo che f non assume valori negativi.

Innanzi tutto, osserviamo che, come abbiamo già detto, la funzione $f(x) = x^2$ è una funzione CONTINUA (in tutto $\mathbb{R}$).

Ora vediamo un "trucchetto grafico" per determinare il codominio di funzioni continue. Diamo il seguente teorema (senza dim.):

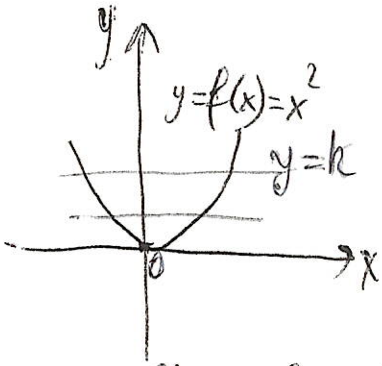
TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo o semiretta o tutto $\mathbb{R}$ (cioè un insieme di tipo I), e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione continua in I. Se f assume due valori diversi y_1 ed y_2 (senza restrizione, $y_1 < y_2$), allora f assume TUTTI i valori y compresi fra y_1 ed y_2.



Nella figura, $I = [a, b]$. Se vengono assunti i valori y_1 ed y_2 ed y è un qualsiasi valore strettamente compreso fra y_1 ed y_2 ($y_1 < y < y_2$), allora la nostra funzione f "dovrà passare dalla quota y", in quanto f "non fa salti" ed f è definita IN UN INSIEME DI TIPO I. Brevemente parlando, il teorema dei valori intermedi si può "estendere" anche considerando i valori $+\infty$ e/o $-\infty$: per esempio, se f è continua in $[0, +\infty[$, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, allora f, in $[0, +\infty[$, assume TUTTI I VALORI $y \in [0, +\infty[$. Questo è il caso della nostra funzione $f(x) = x^2$. Siccome f non assume valori negativi, allora si deduce che il codominio di $f(x) = x^2$ è ESATTAMENTE $[0, +\infty[$. Fatto questo, siamo pronti a definire la funzione "radice quadrata".

(RADICE QUADRATA) $(2<3 \Rightarrow 2^2 = 2\cdot 2 < 2\cdot 3 < 3\cdot 3 = 3^2)$ (vedi anche p. 17)

Consideriamo ora la funzione $f(x) = x^2$



Questa funzione è strettamente decrescente in $]-\infty, 0]$, ed è strettamente crescente in $[0, +\infty[$. Quindi è iniettiva in $]-\infty, 0]$ ed è iniettiva in $[0, +\infty[$.

Inoltre, la funzione f assume tutti i valori positivi e 0, ma non assume mai valori negativi, e quindi il suo codominio è $[0, +\infty[$. Pertanto, f considerata come funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ <u>non è</u> <u>SURIETTIVA</u>, ma vista come funzione $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, è <u>SURIETTIVA</u>.

Inoltre f, considerata sempre <u>GLOBALMENTE</u> come una funzione $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, è <u>NON INIETTIVA</u> in $\mathbb{R}$.

Infatti osserviamo che, per ogni $k > 0$, la retta orizzontale $y = k$ incontra il grafico della funzione $f(x) = x^2$ in <u>DUE</u> PUNTI. Essendo però f iniettiva in $]-\infty, 0]$ e iniettiva in $[0, +\infty[$, considerando le due restrizioni di f $f_1: [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, $f_2:]-\infty, 0] \to [0, +\infty[$, f_1 ed f_2 sono <u>iniettive</u> e <u>suriettive</u>, quindi <u>biiettive</u>, e sono definite le rispettive "funzioni inverse" $h_1: [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, $h_2: [0, +\infty[\to]-\infty, 0]$, ponendo $h_1(y) = \sqrt{y}$, $h_2(y) = -\sqrt{y}$.

Siccome "il dominio della funzione inversa" è uguale al codominio della funzione di partenza", allora segue che il campo di esistenza della funzione radice quadrata è $[0, +\infty[$, cioè $\sqrt{y}$ ha senso se e solo se $\boxed{y \geq 0}$ e $\sqrt{0} = 0$.

Inoltre $\lim_{y \to +\infty} \pm\sqrt{y} = \pm\infty$, perché $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$.

Siccome f_1 è strettamente crescente e continua, allora anche h_1 è strettamente crescente e continua. Siccome f_2 è strettamente decrescente e continua, allora anche h_2 è strettamente decrescente e continua.

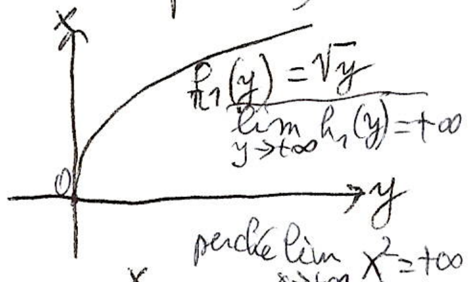
Notiamo che la funzione inversa "mantiene" la stretta crescenza (oppure la stretta decrescenza), E LA CONTINUITÀ. (si vede graficamente, e lo diamo per buono)

ESERCIZIO:
Adesso verifichiamo "a mano" che f_1 ed h_1 sono l'una la funzione inversa dell'altra, come anche f_2 ed h_2.

Per ogni $y \in [0, +\infty[$, si ha: $f_1(h_1(y)) = f_1(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$;

$f_2(h_2(y)) = f_2(-\sqrt{y}) = (-\sqrt{y})^2 =$ (proprietà delle potenze)

$= (-1)^2 \cdot (\sqrt{y})^2 = 1 \cdot y = y$.



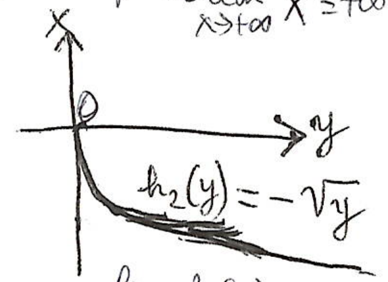
Per ogni $x \in [0, +\infty[$, si ha:

$h_1(f_1(x)) = h_1(x^2) = \sqrt{x^2} = |x| = x$,

in quanto $x \geq 0$. Inoltre, per ogni $x \in]-\infty, 0]$, si ha:

$h_2(f_2(x)) = h_2(x^2) = -\sqrt{x^2} = -|x| = -(-x) = x$,

in quanto $x \leq 0$.



IL RUOLO DEI LIMITI "SI SCAMBIA"

[Notiamo che, come già detto in precedenza,

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

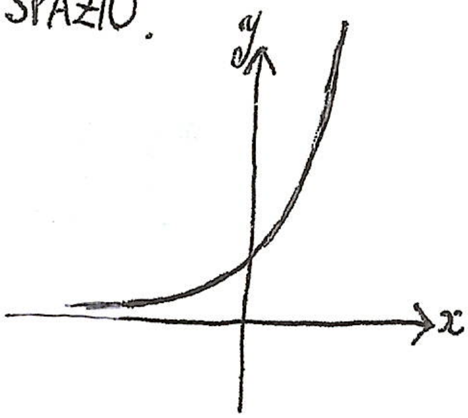
quindi valore assoluto di x e non x (volendo essere precisi: x per $x \geq 0$; $-x$ per $x \leq 0$);

infatti $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ e non -5 (!!)]

Porremo $\boxed{y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}}$, dove ha senso

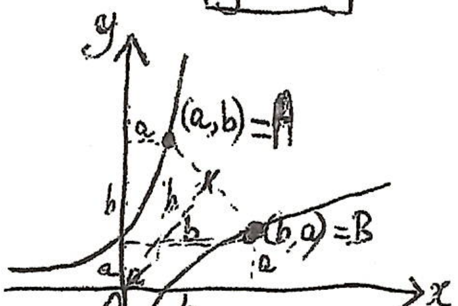
Vediamo ora come si costruisce il grafico della funzione inversa (per funzioni continue definite in un insieme di tipo I).

1° modo) Si parte dal grafico della funzione di partenza, si esegue una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ (90°) in senso ANTIORARIO, e poi si fa un RIBALTAMENTO NELLO SPAZIO.



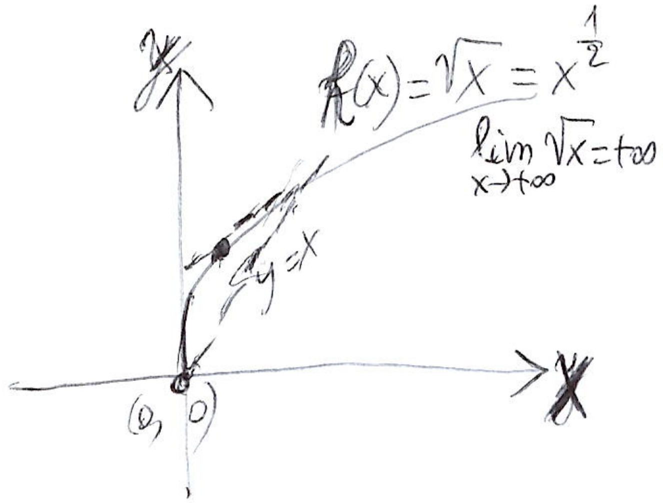
Facendo questi due movimenti, il grafico della funzione inversa lo si potrà vedere in controluce sull'altra faccia del foglio, ove i ruoli della x e della y sono SCAMBIATI.

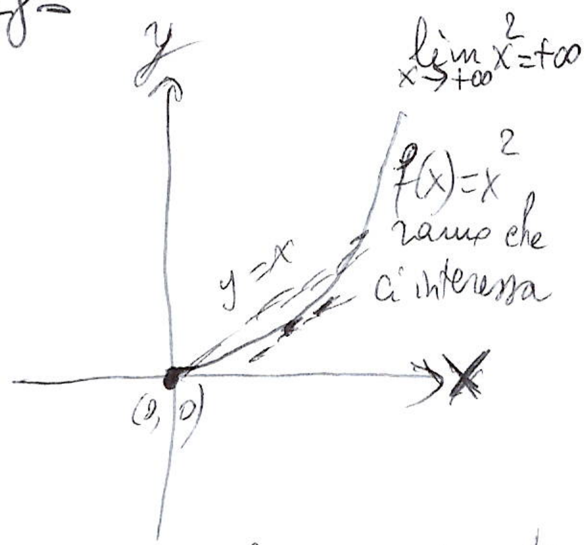
2° modo) Il grafico della funzione di partenza e quello della funzione inversa sono SIMMETRICI RISPETTO ALLA BISETTRICE DEL I E DEL III QUADRANTE, cioè rispetto alla retta $\boxed{y = x}$.



La funzione inversa conserva la CONTINUITÀ! Si continua a NON STACCARE LA PENNA DAL FOGLIO!

Per vedere questo, notiamo che, comunque si prenda un punto $A \equiv (a, b)$ (ove $b = f(a)$) appartenente al grafico della funzione di partenza ed il corrispondente punto $B \equiv (b, a)$ (ove $a = f^{-1}(b)$) appartenente al grafico della funzione inversa, allora il punto medio di A e B ha coordinate $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, e quindi appartiene alla bisettrice del I e III Quadrante.





(Anche se i disegni non sono in proporzione, non importa. Quello che importa è l'idea).

Dal grafico di $h(x) = \sqrt{x}$ si deduce che la derivabilità di h viene mantenuta in ogni punto diverso da 0 (perché la relativa retta tangente obliqua viene "trasformata" in un'altra retta tangente obliqua), mentre il punto 0, pur essendo di continuità per h (perché, essendo f continua, anche h, la funzione inversa di f è continua: questo lo si può vedere geometricamente, perché, se "non stacco la penna dal foglio" con la funzione di partenza, naturalmente continuo a "non staccare la penna dal foglio" con la funzione inversa), è di non derivabilità per h, perché la retta tangente orizzontale al punto (0, 0) per la f, cioè l'asse delle x, viene "trasformata" nella retta tangente VERTICALE al punto (0, 0) per la h, cioè l'asse delle y: allora il punto 0 è un punto di non derivabilità per h (perché la retta tangente è verticale).

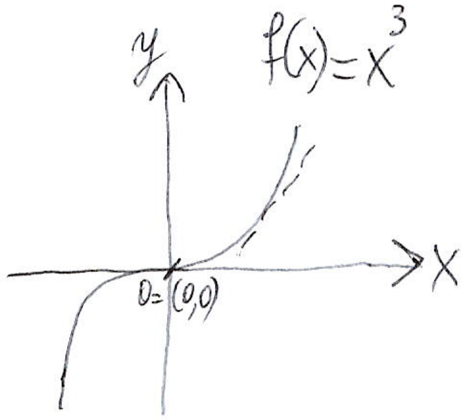
 (RADICE CUBICA)

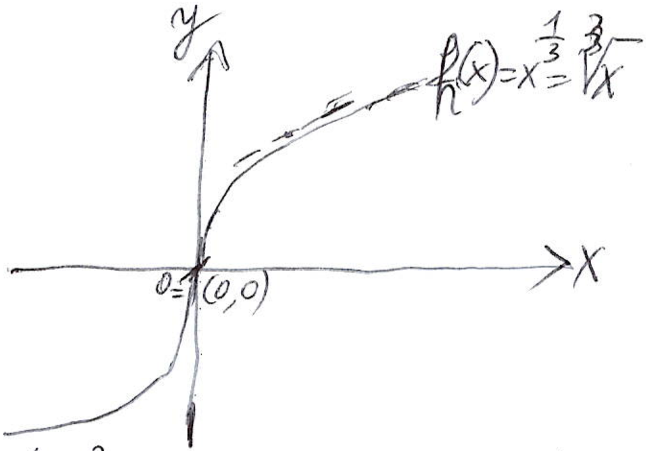
Ora prendiamo la funzione $f(x) = x^3$.
Sappiamo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ha come campo di esistenza $\mathbb{R}$ (l'insieme di <u>tutti</u> i numeri reali), che f è <u>continua</u> in tutto $\mathbb{R}$, che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (perché $(-\infty)^3 = -\infty$), $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (perché $(+\infty)^3 = +\infty$) e quindi, per il teorema dei valori intermedi, f assume <u>tutti</u> i valori reali, e quindi f è (globalmente!) <u>SURIETTIVA</u>. Il codominio di f è tutto $\mathbb{R}$.
Per la regola dei segni, si ha: $x^3 > 0$ per $x > 0$; $x^3 < 0$ per $x < 0$; inoltre è $0^3 = 0$. Quindi $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

[ESERCIZIO: Ora proviamo che f è <u>strettamente crescente</u> (v. anche pag. 19) in $\mathbb{R}$, cioè comunque presi $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$, si ha $x^3 < y^3$.
1° caso: $x < 0 < y$. In questo caso, in virtù di ciò che abbiamo detto a proposito del segno della f, si ha $x^3 < 0 < y^3$, come si voleva dimostrare.
2° caso: $0 < x < y$. Si ha: $0 < \boxed{x^3} = x \cdot x \cdot x < y \cdot x \cdot x < y \cdot y \cdot x < y \cdot y \cdot y = \boxed{y^3}$.
3° caso: $x < y < 0$. Poniamo $v = -x$, $w = -y$. Si ha: $v > w > 0$. Pertanto, per il 2° caso, $v^3 > w^3 > 0$, e quindi

$$\boxed{x^3} = (-v)^3 = -v^3 \boxed{<} -w^3 = (-w)^3 = \boxed{y^3},$$

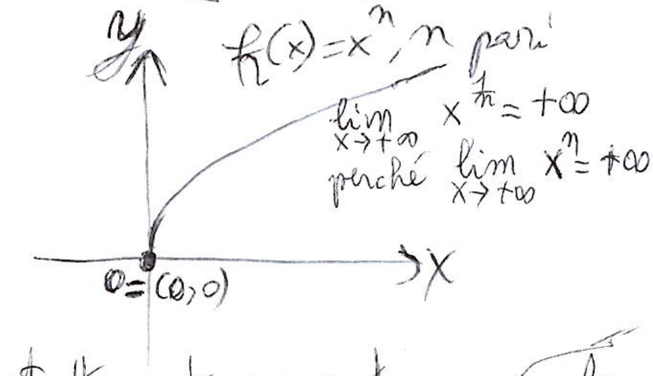
come volevamo provare.]
Abbiamo visto che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ e quindi f è <u>iniettiva</u> in tutto $\mathbb{R}$. Essendo f iniettiva e suriettiva in $\mathbb{R}$, allora f è biiettiva in tutto $\mathbb{R}$ e quindi esiste ed è ben definita la funzione inversa $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, che sarà la <u>RADICE CUBICA</u>:
$h(y) = \sqrt[3]{y}$ (per ogni $y \in \mathbb{R}$). Porremo $\boxed{y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{y}}$.



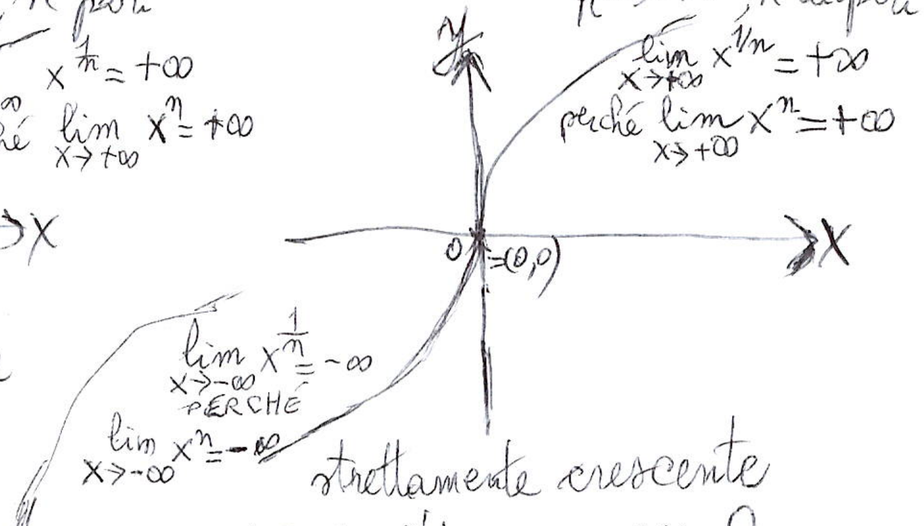


La funzione inversa $h(x)=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}$ sarà strettamente crescente, perché la funzione di partenza $f(x)=x^3$ è strettamente crescente. Inoltre dalla continuità di f segue che h è continua (anche in virtù di considerazioni grafiche, in quanto, se ~~non~~ si stacca la penna dal foglio con la funzione f, non si staccherà neppure la penna dal foglio con la funzione h).
Inoltre, dal grafico di $h(x)=\sqrt[3]{x}$ si deduce che la derivabilità di h viene mantenuta in ogni punto diverso da $\bar{O}$ (perché la relativa retta tangente obliqua viene "trasformata" in un'altra (corrispondente) retta tangente obliqua), mentre il punto O, pur essendo di continuità per h, è di NON DERIVABILITÀ per h, perché la retta tangente orizzontale al punto $(0,0)$ per f, cioè l'asse delle x, viene "trasformata" nella retta tangente VERTICALE al punto $(0,0)$ per h, cioè nell'asse delle y! allora il punto O è un punto di non derivabilità per h, perché la retta tangente è verticale).

Si può vedere che, per n pari, la funzione x^n si comporta analogamente come la funzione x^2, e che per n dispari la funzione x^n si comporta analogamente come la funzione x^3, e quindi la funzione «radice n-esima» $\boxed{h(x) = \sqrt[n]{x}}$ oppure $\boxed{h(x) = x^{\frac{1}{n}}}$, viene definita analogamente come $\sqrt{x}$ e $\sqrt[3]{x}$, e sarà ancora una funzione continua in tutti i punti del suo campo di esistenza, e derivabile in tutti i punti del suo campo di esistenza tranne che nel punto 0 (dove abbiamo la retta tangente VERTICALE).



strettamente crescente
positiva per $x > 0$
$h(0) = 0$



strettamente crescente
positiva per $x > 0$
negativa per $x < 0$
$h(0) = 0$.

In questo modo si definiscono le potenze $x^{\frac{1}{n}}$.
Se $q = \frac{m}{n}$ è razionale positivo ($m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $n > 0$) e la frazione $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini (per esempio, $\frac{2}{3}$ e non $\frac{4}{6}$), definiamo, dove ha senso, $x^{\frac{m}{n}}$ come $\sqrt[n]{x^m}$ (vale a dire, come $(x^m)^{\frac{1}{n}}$). Se p è razionale negativo, $p = -q$, $q = -p$, con q razionale positivo, definiamo x^p come $x^p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x^q}$. Esempio: $8^{-2/3} = \frac{1}{8^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{4}$.
Se $\boxed{\frac{m}{n} > 0}$, porremo $0^{\frac{m}{n}} = 0$. Non si definisce 0^p per $p \leq 0$.

Consideriamo ora le potenze ad esponente irrazionale.
Cominciamo con un esempio: come si definisce $2^{\sqrt{2}}$?
$\sqrt{2} \simeq 1,41421356\ldots$ Notiamo che $\sqrt{2}$ può essere "costruito per approssimazioni successive", approssimando con 1, 1,4 1,41 1,414 .... e con 2, 1,5 1,42 1,415
(si può vedere che, procedendo indifferentemente con la prima o con la seconda approssimazione, si ottiene sempre il numero $\sqrt{2}$).
Adesso, consideriamo le seguenti due approssimazioni
$2^1 \quad 2^{1,4} \quad 2^{1,41} \quad 2^{1,414} \ldots$ e $\quad 2^2 \quad 2^{1,5} \quad 2^{1,42} \quad 2^{1,415} \ldots$
Si può vedere che, andando avanti indifferentemente con la prima o la seconda approssimazione, si ottiene lo stesso numero: questo numero lo chiameremo $2^{\sqrt{2}}$.
Più in generale, quando la base è <u>positiva</u> e t è un numero irrazionale, definiamo

$$(*_0^+) \quad a^t = \lim_{\substack{q \text{ razionale} \\ q \to t^-}} a^q = \lim_{\substack{q \text{ razionale} \\ q \to t^+}} a^q .$$

Si può vedere che i due limiti in $(*_0^+)$ esistono e sono "<u>uguali</u>".
Questo, quando $\boxed{a>0}$.
Inoltre, quando $a=0$, si pone $0^t=0$ per ogni $t>0$, mentre <u>non si definisce</u> 0^t per $t \leq 0$.

Se t è irrazionale, <u>non si definisce</u> a^t per $a<0$.
Visto che la quantità in $(*_0^+)$ è stata definita, in un certo senso, "con continuità", si può vedere intuitivamente (ma non facciamo la dimostrazione) che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ (sia razionale sia irrazionale) si ha

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0} \quad (\text{con } a>0).$$

Quindi, fissato $a>0$, la funzione "ESPONENZIALE" $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x)=a^x$ È <u>CONTINUA</u> IN TUTTO $\mathbb{R}$.

~~È stato~~ possibile quindi definire la potenza con esponente irrazionale t, diciamo $\boxed{a^t}$, per ogni $a>0$, in modo tale che siano verificate le seguenti

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DELLE POTENZE:

(senza dimostrazione)

$\boxed{a^{x+y}=a^x\cdot a^y}$ per ogni $a>0$, per ogni $x,y\in\mathbb{R}$

$\boxed{(a^x)^y=a^{xy}}$ per ogni $a>0$, per ogni $x,y\in\mathbb{R}$

$\boxed{(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x}$ per ogni $a,b>0$, per ogni $x\in\mathbb{R}$

$\boxed{a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}}$ per ogni $a>0$, per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ (dove ha senso)

(Queste proprietà sono verificate anche quando la base è negativa, purché TUTTO QUELLO CHE È SCRITTO ABBIA SENSO, per esempio $\boxed{(-1)^{3+5}=(-1)^3\cdot(-1)^5}$:

infatti $(-1)^{3+5}=(-1)^8=1$ (8 è pari)

$$\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}=$$

$$(-1)^3=(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)=1\cdot(-1)=-1$$

$$(-1)^5=\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot\underbrace{(-1)\cdot(-1)}_{1}\cdot(-1)=-1$$

$(-1)^3\cdot(-1)^5=(-1)\cdot(-1)=1=(-1)^8$. Più in generale,

$$\boxed{\text{N.B.: } (-1)^n=\begin{cases}1 & \text{se } n \text{ è pari}\\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari}\end{cases}}$$
)

Quindi abbiamo visto che, comunque dati (cambiamo lettera, per ora, per cercare di evitare "confusione"...) un numero reale <u>positivo</u> z e un numero reale <u>qualunque</u> t, abbiamo definito la quantità z^t

Ora, se fissiamo l'esponente (che "ribattezziamo" b) e facciamo variare la base (che "ribattezziamo" x) avremo la funzione $f: \underbrace{]0,+\infty[}_{\mathbb{R}^+} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo $\boxed{f(x)=x^b}$ con b fissato, $b\in\mathbb{R}$

(FUNZIONE <u>POTENZA AD ESPONENTE REALE QUALSIASI</u>)

mentre se fissiamo la base (che "richiameremo" a) e facciamo variare l'esponente (che "richiameremo" x) avremo la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ (che vedremo che assumerà sempre valori positivi) definita ponendo $\boxed{f(x)=a^x}$ con a fissato, $\boxed{a>0}$

(FUNZIONE ESPONENZIALE) (con base <u>positiva</u>)

In realtà, di fatto, distingueremo due casi $\boxed{a>1}$ e $\boxed{0<a<1}$. Il caso $a=1$ è banale, perché in tal caso si ritrova la funzione costante identicamente uguale a 1: $f(x)=1$ per ($\forall$) ogni $x\in\mathbb{R}$. Infatti, per ogni numero razionale $\frac{m}{n}$ con $m\geq 0$, $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ positivo si ha: $1^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{1^m}=\sqrt[n]{1}=1$; poi, se m è negativo (intero negativo) ed n è sempre intero positivo, si ha

$$1^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{1^{-\frac{m}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$ (perché $-m>0$ e per quello che è stato detto (subito) prima)

per definizione di potenza ad esponente negativo

Infine, per "approssimazione", procedendo analogamente come nella definizione di $2^{\sqrt{2}}$ si ottiene $1^t=1$ anche quando t è irrazionale. Quindi $1^x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Adesso studieremo la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ $(a>0, a \neq 1)$ e tracceremo anche il grafico (il grafico cambia il suo andamento a seconda che $a>1$ oppure $0<a<1$), e poi vedremo anche la funzione $f(x) = \log_a x$ (LOGARITMO).

Siccome la quantità a^x è stata definita per tutti gli x reali, si ha che il campo di esistenza (o dominio, o insieme di definizione) della funzione esponenziale è <u>tutto $\mathbb{R}$</u>.

Adesso studiamo il segno della funzione. Innanzi tutto, si ha $a^0 = 1 > 0$. Siccome $a>0$, se n è intero positivo si ha $a^n > 0$, in quanto $a^1 = a > 0$, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n volte) >0. Se n è intero negativo, si ha $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$ (ove $-n$ è intero positivo) $= \frac{1}{\text{numero positivo}} > 0$.

Se $q = \frac{m}{n}$, ove m ed n sono due interi positivi e la frazione $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini (per esempio, $\frac{3}{5}$ e non $\frac{6}{10}$), allora
$a^q = \sqrt[n]{a^m}$, e viene sempre un numero positivo. Se p è un razionale negativo, allora, posto $q = -p$, si ha $q>0$ e $p = -q$, quindi $a^p = a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ (potenze ad esponente negativo) $= \frac{1}{\text{numero positivo}} > 0$.

Infine, se r è irrazionale, analogamente a come è stata definita la quantità $2^{\sqrt{2}}$, si ha che - in ogni caso, la quantità a^r viene approssimata dall'alto da $a^{q_1}, a^{q_2}, \ldots, a^{q_n}, \ldots$ dove $q_1, \ldots, q_n$ sono degli opportuni numeri razionali, e dal basso da $a^{s_1}, a^{s_2}, \ldots, a^{s_n}$ dove $s_1, \ldots, s_n$ sono degli opportuni numeri razionali (per esempio, $2^1, 2^{1,4}, 2^{1,41} \ldots 2^2, 2^{1,5}, 2^{1,42} \ldots$). in ogni caso a^r sarà compreso tra a^{q_1} ed a^{s_1} (nell'esempio, $2^{\sqrt{2}}$ sarà compreso fra 2^1 e 2^2), che sono numeri <u>positivi</u>, e quindi si ha: $\boxed{a^r > 0}$.

Quindi abbiamo provato che $\boxed{a^x > 0}$ per <u>ogni</u> $\boxed{x \in \mathbb{R}}$ e pertanto LA FUNZIONE ESPONENZIALE HA SEMPRE SEGNO <u>POSITIVO</u> e non si annulla mai. Questo vale <u>PER OGNI FISSATO $a>0$.</u>

Esercizio:

[Adesso vediamo che la funzione esponenziale $f(x)=a^x$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ quando $a>1$ ed è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ quando $0<a<1$.

Vediamo dapprima il caso $a>1$. Osserviamo che, quando n è un intero positivo, si ha $a^n>1$, in quanto $a^1=a>1$, $a^n=a\cdot a\ldots a$ (n volte) >1. Se $q=\frac{m}{n}$, ove m ed n sono due interi positivi e la frazione $\frac{m}{n}$ è ridotta ai minimi termini, allora $a^q=\sqrt[n]{a^m}$ viene sempre un numero maggiore di 1. Infine, se $r>0$ è irrazionale, procedendo analogamente come nella seconda metà della pagina precedente, troveremo due numeri razionali q_1 ed s_1 tali che $a^{s_1}<a^r<a^{q_1}$; ma essendo (in virtù del punto precedente) $a^{s_1}>1$, avremo anche $a^r>1$. Quindi abbiamo dimostrato che

(*) se $a>1$, si ha $\boxed{a^x>1 \text{ per ogni } x>0}$.

Ora proviamo che, se $a>1$, la funzione $f(x)=a^x$ è STRETTAMENTE CRESCENTE in $\mathbb{R}$.

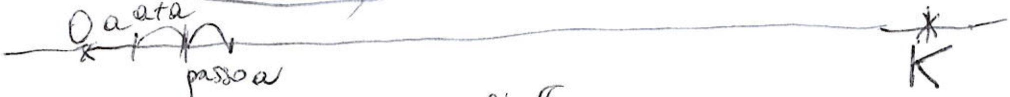
Fissiamo arbitrariamente due numeri reali x_1, x_2 con $x_1<x_2$. Allora $x_2-x_1>0$, e quindi, per la (*), $\boxed{a^{x_2-x_1}>1}$. Questo vuol dire, per le proprietà delle potenze, $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$, e quindi $a^{x_2}>a^{x_1}$, come volevamo dimostrare. Infatti, essendo $a^{x_1}>0$, ha senso dividere per a^{x_1}, e poi ha senso moltiplicare per a^{x_1} tutti e due i termini della disuguaglianza $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}>1$, mantenendo inalterato il verso ($>$) e ottenendo $a^{x_2}>a^{x_1}$.

Ora dimostriamo che, se $0<a<1$, la funzione $f(x)=a^x$ è STRETTAMENTE DECRESCENTE in $\mathbb{R}$. Fissiamo arbitrariamente $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1<x_2$. Allora, da $0<a<1$, passando ai reciproci (a è positivo) si ottiene $\frac{1}{a}>1$, e pertanto $\frac{1}{a^{x_2}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}>\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1}=\frac{1}{a^{x_1}}$, da cui $a^{x_2}<a^{x_1}$, passando ancora ai reciproci, come volevamo dimostrare.]

Adesso vogliamo provare l'esistenza della funzione inversa della funzione esponenziale, che chiameremo funzione logaritmo. Procediamo passo per passo. (N.B.: il logaritmo ancora «non lo conosciamo»)...

Adesso facciamo vedere che, se $\boxed{a>1}$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty}$

(n.b.: Qui a è fissato, ma può essere anche molto vicino a 1, per esempio 1,01 1,001, eccetera). A tale scopo, vediamo intuitivamente una nota proprietà dei numeri reali, (PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE) senza dimostrazione.



Sia $K>0$ molto grande, molto "vicino" a $+\infty$, e sia $a>0$ un numero positivo, anche abbastanza "piccolino" (per esempio, 0,0001). Partiamo dal punto 0, sulla retta reale, e ci spostiamo verso destra, ogni volta con passo a. La proprietà di Archimede ci dice che esiste un numero intero positivo n abbastanza grande tale che, dopo n passi, superiamo il numero K, cioè tale che $n \cdot a > K$ (N.B.: Il "percorso" fatto dopo n passi è dato da $a+a+\dots+a$ n volte, cioè $n \cdot a$). Vedendo intuitivamente, notiamo che la proprietà di Archimede vale anche se i passi vengono fatti "con la moltiplicazione" invece che con la somma,

con l'accortezza che: lo 0 diventa 1, la somma diventa moltiplicazione. Quindi abbiamo che: se $K>0$ è un numero molto grande, ed $a>1$ (anche, per esempio 1,01; 1,001, eccetera), allora esiste un numero intero positivo n abbastanza grande tale che $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n volte) $>K$, cioè $a^n > K$. Questo discorso lo possiamo fare per ogni $K>0$ grande quanto vogliamo. Quindi vuol dire che la quantità a^x (oppure a^n) quando x (n) è molto grande, supera qualunque valore $K>0$ prefissato: vale a dire, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty} \quad \left(\text{oppure } \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty\right)$$

Tutto questo è vero, purché $\boxed{a>1}$. Ma, per l'appunto, siamo proprio nel caso $a>1$ (!!), e quindi l'asserto è provato.

Ora dimostriamo che, se $\boxed{a>1}$, $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = 0}$.

Sia $t=-x$; allora $x=-t$. Inoltre, poiché $x\to-\infty$, si ha che $t\to+\infty$. Quindi

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x} = \lim_{t\to+\infty} a^{-t} = (\text{proprietà delle potenze}) \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a^t} =$$

$$= (\text{proprietà dei limiti}) \ \frac{1}{\lim_{t\to+\infty} a^t} = (\text{per il passo precedente}) \frac{1}{+\infty} = \boxed{0},$$

come si voleva provare.

Adesso dimostriamo che, per $0<a<1$, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x = 0}$.

Sia $b=\frac{1}{a}$; notiamo che a è positivo e quindi possiamo passare ai reciproci, ottenendo $\frac{1}{a}>1$, cioè $b>1$. Inoltre notiamo che da $b=\frac{1}{a}$ si ottiene $a\cdot b=1$, e quindi $a=\frac{1}{b}$. Pertanto si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = (\text{proprietà delle potenze}) \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b^x} =$$

$$= (\text{proprietà dei limiti}) \frac{1}{\lim_{x\to+\infty} b^x} \overset{(b>1)}{=} \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}, \text{ come si voleva provare.}$$

Vediamo ora che, per $\boxed{0<a<1}$, si ha $\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty}$.

Sia $b=\frac{1}{a}$ come nel caso precedente; notiamo che $a=\frac{1}{b}$, e inoltre $b>1$. Si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} a^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\lim_{x\to-\infty} b^x} \overset{(b>1)}{=} \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty},$$

come volevasi dimostrare (N.B.: abbiamo scelto 0^+ e non 0^- perché la funzione b^x assume sempre valori positivi !!!)

Adesso determiniamo il CODOMINIO della funzione a^x.

Siccome $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ se $a > 1$

e inoltre $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$,

allora, in virtù del teorema dei valori intermedi, la nostra funzione, in ogni caso ($a > 0$, $a \neq 1$) assume tutti i valori compresi tra 0 e $+\infty$, estremi esclusi.

N.B.: 0 è escluso perché la funzione assume sempre valori strettamente positivi. Per questo stesso motivo, dato che i valori negativi e lo 0 non vengono mai assunti, possiamo concludere che IL CODOMINIO della funzione a^x è **ESATTAMENTE** L'INSIEME DI TUTTI I NUMERI REALI STRETTAMENTE POSITIVI, cioè $]0, +\infty[$.

(LOGARITMI)

Ora, consideriamo **le** funzioni

$f_1(x) = a^x$ $\quad f_1 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ $\quad$ caso $a > 1$

$f_2(x) = a^x$ $\quad f_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ $\quad$ caso $0 < a < 1$

Notiamo che f_1 è strettamente crescente e che f_2 è strettamente decrescente, e pertanto f_1 ed f_2 sono <u>iniettive</u>. Inoltre, poiché a destra della freccia c'è $]0, +\infty[$, che è il <u>codominio</u> della f_1 e della f_2, allora f_1 ed f_2 sono <u>suriettive</u>, e quindi sono anche <u>biiettive</u>. Pertanto esistono le rispettive funzioni <u>inverse</u> g_1 e g_2, che chiameremo

$g_1(x) = \log_a x$, **per** $a > 1$, $\quad g_2(x) = \log_a x$ per $0 < a < 1$

(LOGARITMO IN BASE a di x). Siccome, nel passaggio alla funzione inversa, i ruoli del dominio e del codominio si scambiano, allora $g_1 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, cioè la funzione $\log_a x$ è definita in $]0, +\infty[$ (cioè per $x > 0$) ed è <u>SURIETTIVA GLOBALMENTE</u> (perché il codominio è tutto $\mathbb{R}$)

Inoltre, siccome la funzione inversa mantiene la continuità, allora la funzione logaritmo è continua. Nel caso $a>1$, la funzione $g_1(x)=\log_a x$ è strettamente crescente (in quanto la funzione $f_1(x)=a^x$ è strettamente crescente e la funzione inversa mantiene la stretta crescenza). Analogamente si vede che, nel caso $0<a<1$, la funzione $g_2(x)=\log_a x$ è strettamente decrescente (per la stretta decrescenza della funzione $f_2(x)=a^x$)

Per determinare il grafico delle funzioni a^x, $\log_a x$, faremo lo studio di funzione, e quindi analizzeremo la derivata (prima), la derivata seconda con la concavità, convessità ed eventuali punti di flesso, gli asintoti. Intanto, RICAPITOLANDO:

1) Fissato $a>0, a\neq 1$, e dato $x>0$, il <u>logaritmo</u> in base a di x è <u>quel</u> numero reale y tale che $\boxed{a^y=x}$. Questo, perché il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale. Quindi $\log_{10}100=2$, perché $10^2=10\cdot 10=100$; $\log_{10}1000=3$, perché $10^3=10\cdot 10\cdot 10=$ $=100\cdot 10=1000$; $\log_3 9=2$, perché $3^2=3\cdot 3=9$.

In Chimica, il pH di una sostanza, detto in modo semplice, è "il logaritmo del <u>reciproco</u> della concentrazione idrogenionica" (cioè della concentrazione degli ioni H^+), ove il logaritmo è espresso in base 10. Ad esempio, un $pH=2$ (sostanza molto acida) vuol dire che la concentrazione idrogenionica è $10^{-2}=\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}$

Il reciproco di $\frac{1}{100}$ è 100, cioè 10^2, e il logaritmo in base 10 di 100 è 2, che sarà il nostro pH. Con $\log x$ oppure $\ln x$ indichiamo il logaritmo in base $e\simeq 2,7182818\ldots$ (numero di Nepero), mentre $\mathrm{Log}\, x=\log_{10} x$.

N.B.: Il numero di Nepero e è definito come $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Il numero di Nepero ha svariate applicazioni allo studio dei fenomeni riguardanti la dinamica, crescita, decrescita di popolazioni. Si può vedere che $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b$ per ogni $b \in \mathbb{R}$ (senza dim.)

Inoltre evidenziamo che, per le proprietà delle funzioni inverse, si ha $\boxed{\log_a a^t = t}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$; $\boxed{a^{\log_a s} = s}$ per ogni $s > 0$ (sempre con $a > 0, a \neq 1$). Ciò vuol dire che, se si parte da t, si fa a^t, e poi si fa il logaritmo in base a del valore ottenuto, si ritorna al punto di partenza t; mentre se si parte da s (positivo), si fa $\log_a s$, e poi si fa l'esponenziale (rispetto alla base a) del valore ottenuto, si ritorna al punto di partenza s.

SEGNO DEL LOGARITMO

Notiamo ancora che, per ogni $a > 0$, $a \neq 1$, si ha $\log_a 1 = 0$, in quanto $a^0 = 1$ e in virtù delle proprietà delle funzioni inverse. Se $\boxed{a>1}$, da ciò segue che, essendo il logaritmo una funzione strettamente crescente, si ha che $\log_a x$ è <u>positivo per ogni $x > 1$</u>, mentre $\log_a x$ è <u>negativo</u> per ogni x tale che <u>$0 < x < 1$</u>. Invece, se $\boxed{0<a<1}$, segue che, essendo il logaritmo una funzione strettamente decrescente, si ha che $\log_a x$ è <u>negativo</u> per ogni $x > 1$, mentre è <u>positivo</u> per ogni x tale che $0 < x < 1$.

PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEI LOGARITMI

0) Se $a>0, a\neq 1$, allora $\boxed{\log_a 1 = 0}$, $\boxed{\log_a a = 1}$.

1) Se $a>0, a\neq 1$, $x>0$, $y>0$, si ha:

1a) $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$

1b) $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

2) Se $a>0, a\neq 1$, $x>0$, $b\in\mathbb{R}$, si ha:

$$\boxed{\log_a (x^b) = b\cdot \log_a x}$$

3) FORMULA DEL CAMBIO DI BASE

Siano $a, b>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$. Per ogni $x>0$ si ha

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

Esempi: $a = 100$ $\quad x = 10'000$ $\quad b = 10$.

Si ha: $100^2 = 100\cdot 100 = 10'000$, quindi $\log_{100} 10'000 = 2$.

Inoltre $\log_{10} 10'000 = 4$, perché $10^4 = 10'000$;

$\log_{10} 100 = 2$, perché $10^2 = 100$. Quindi $2 = \frac{4}{2}$, ok.

La formula del cambio di base è molto comoda quando è più agevole calcolare i logaritmi in base b piuttosto che i logaritmi in base a; inoltre b ce la possiamo scegliere come ci fa più comodo. Per esempio:

$$\log_{100} 1000 = \frac{\log_{10} 1000}{\log_{10} 100} = \frac{3}{2} \quad (a=100, b=10, x=1000)$$

Ciò viene dalla cosiddetta "regola della catena":

$$\boxed{\log_b a \cdot \log_a x = \log_b x} \quad (a,b,x>0, a\neq 1, b\neq 1)$$

Il nostro scopo è ora quello di calcolare le derivate prima e seconda dell'esponenziale e del logaritmo e di trattare i rispettivi asintoti, in modo tale di trattare a^x e $\log_a x$ come studio di funzioni e di fare lo studio completo di queste funzioni. Premettiamo i seguenti risultati, che si chiamano limiti notevoli e ~~che~~ per ora diamo "per buoni".

LN$_1$) Per ogni fissato $a>0$, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a}.$$

Come caso particolare, essendo $\ln e = \log_e e = 1$, per $a=e$ si ha:

LN$_2$) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}.$$

LN$_3$) Per ogni fissato $a>0, a\neq 1$, si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}}$$

LN$_4$) Come caso particolare, per $a=e$ si ha

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}.$$

N.B.: Il fatto che $\log_a e = \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{\log_e a}$ segue dalla REGOLA DELLA CATENA. Infatti si ha:

$$\boxed{1} = \log_e e = \log_e a \cdot \log_a e = \boxed{\ln a \cdot \log_a e},$$ da cui

$$\frac{1}{\ln a} = \log_a e,$$ come volevamo dimostrare.

Adesso calcoliamo la derivata della funzione esponenziale $f(x) = a^x$ $a > 0$. Proviamo che

$$\boxed{D(a^x) = a^x \cdot \ln a} \qquad a > 0$$

Se $a = 1$, si ha $a^x = 1^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e quindi

$$\boxed{D(a^x)} = D(1) = 0 = 1 \cdot 0 = \boxed{a^x \cdot \ln a}$$

Sia ora $a > 0$, $a \neq 1$. Utilizziamo il limite notevole della pagina precedente

$$LN_1) \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha:

$$\boxed{D(a^x)} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \text{(proprietà fondamentali delle potenze)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x \cdot (a^h - 1)}{h} = \left(\begin{array}{c}\text{il limite del} \\ \text{prodotto è il pro} \\ \text{dotto dei limiti}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\ln a \text{ (limite notevole)}} = \boxed{a^x \cdot \ln a} \quad \left(\begin{array}{l}\text{il limite di una} \\ \text{costante è la costante} \\ \text{stessa, ed } a^x \text{ è una} \\ \text{costante, perché il} \\ \text{limite è rispetto ad } h\end{array}\right)$$

Come volevamo dimostrare. Nel caso $a = e$, si ha $\ln e = \log_e e = 1$, e quindi

$$\boxed{D(e^x) = e^x}$$

Si ritrova che la derivata di e^x è sempre positiva, e per il test di monotonia la funzione e^x è strettamente crescente (già sapevamo). Inoltre, $\ln a = \log_e a$, e per quanto visto a proposito del segno del logaritmo, visto che $e > 1$, si ha: $\log_e a > 0$ per $a > 1$; $\log_e a < 0$ per $0 < a < 1$. Pertanto, se $a > 1$, si ha $D(a^x) = a^x \cdot \ln a > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e per il test di monotonia si ritrova che la funzione a^x è strettamente crescente; mentre se $0 < a < 1$, si ha $D(a^x) = a^x \cdot \ln a < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, e per il test di monotonia si ritrova che la funzione a^x è strettamente decrescente.

Lo studio della derivata (prima) di a^x consente anche di rispondere alla domanda se la funzione a^x ammette asintoti obliqui oppure no, e quindi per questo abbiamo calcolato prima la derivata, e adesso facciamo gli asintoti. Innanzi tutto osserviamo che in ogni caso la funzione esponenziale a^x non ammette asintoti verticali, essendo continua su tutto $\mathbb{R}$. Sia ora $a>1$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$, sappiamo che la retta $y=0$ (cioè l'asse delle x) è un asintoto orizzontale dal lato $-\infty$. Invece, dal lato $+\infty$, non c'è asintoto orizzontale, in quanto $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Allora vediamo se ci sono asintoti obliqui dal lato $+\infty$. Calcoliamo $\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x}}$ (caso $a>1$).
Si tratta di una forma del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$. Applicando il teorema de l'Hôpital, si ha:

$$\boxed{m} = \lim_{x\to+\infty} \frac{D(a^x)}{D(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = (+\infty)\cdot \text{numero positivo (essendo } a>1) = \boxed{+\infty}$$

Da ciò si deduce subito che NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI.
Inoltre il calcolo di m è FONDAMENTALE per un altro motivo: il fatto che $m=+\infty$ sta a significare che, quando $\boxed{a>1}$ e $x\to+\infty$, allora la funzione ESPONENZIALE a^x TENDE a $+\infty$ PIÙ VELOCEMENTE DI x. Si può vedere che, addirittura, la funzione esponenziale a^x, sempre in questo caso, TENDE a $+\infty$ PIÙ VELOCEMENTE DI x^n per ogni intero positivo n: quindi, detto in modo semplice, per $a>1$ e al tendere di x a $+\infty$, "L'ESPONENZIALE VINCE SEMPRE".
Vediamolo per $n=2$, cioè proviamo che, per ogni fissato $a>1$, $\boxed{m_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^2} = +\infty}$. Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{+\infty}$: applicando de l'Hôpital si ha

$$m_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{D(a^x)}{D(x^2)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x \ln a}{2x} = \frac{\overset{>0}{\ln a}}{2} \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x}$$

(le costanti moltiplicative sono state portate fuori dal segno di limite) = (per il risultato di m) (numero positivo) $\cdot (+\infty) = +\infty$, come volevamo dimostrare.
Ora, sia $0<a<1$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$, la retta $y=0$ (cioè l'asse x) è un asintoto orizzontale dal lato $+\infty$. Invece, dal

lato $-\infty$, non c'è asintoto orizzontale, poiché $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$. Allora vediamo se ci sono asintoti obliqui dal lato $-\infty$. Calcoliamo $m = \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x}{x}$ (caso $0<a<1$). Si tratta di una forma indeterminata del tipo $\frac{+\infty}{-\infty}$. Applicando il teorema de l'Hôpital, si ottiene

$$\boxed{m} = \lim_{x \to -\infty} \frac{D(a^x)}{D(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a^x \ln a}{1} = (\ln a) \cdot \lim_{x \to -\infty} a^x =$$

$=$ (notiamo ora che $0<a<1$, e quindi $\ln a < 0$) $=$

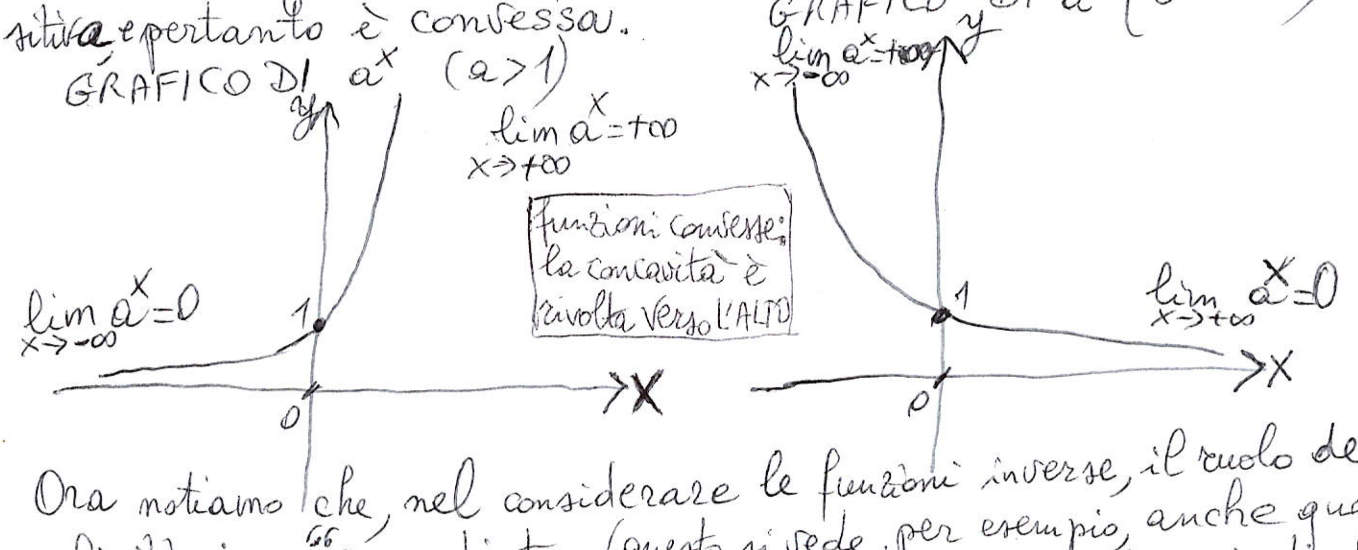
$=$ (numero negativo) $\cdot (+\infty) = \boxed{-\infty}$ per la regola dei segni.

Quindi possiamo già concludere che non ci sono asintoti obliqui (neanche nel caso $0<a<1$).

Calcoliamo la derivata seconda di a^x. Abbiamo visto nella pagina precedente che $D(a^x) = a^x \cdot \ln a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (sia nel caso $a>1$ che nel caso $0<a<1$). La derivata seconda $D^{(2)}$ di a^x è la derivata della derivata (prima). Si ha:

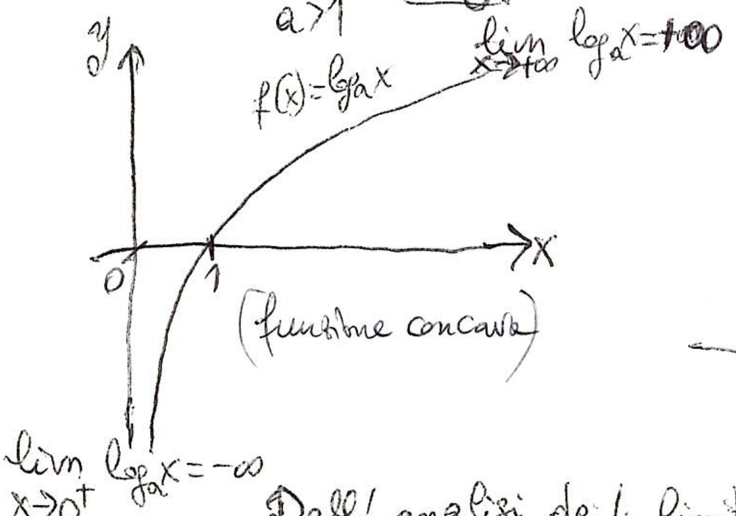
$\boxed{D^{(2)}(a^x)} = D(a^x \cdot \ln a) =$ ($\ln a$ è una costante moltiplicativa e quindi può essere portata fuori o dentro il segno di derivata) $= (\ln a) \cdot D(a^x) = (\ln a) \cdot a^x \cdot \ln a =$
$= \boxed{a^x (\ln a)^2} > 0$: infatti $a^x > 0$; inoltre, siccome $a>0$ ed $a \neq 1$, abbiamo che $\ln a$ sarà o strettamente positivo o strettamente negativo (come abbiamo visto a proposito dello studio del segno del logaritmo), e quindi in ogni caso $(\ln a)^2 > 0$ (perché il quadrato di un numero diverso da zero è sempre strettamente positivo). Quindi in ogni caso la funzione a^x ha sempre derivata seconda positiva e pertanto è convessa.

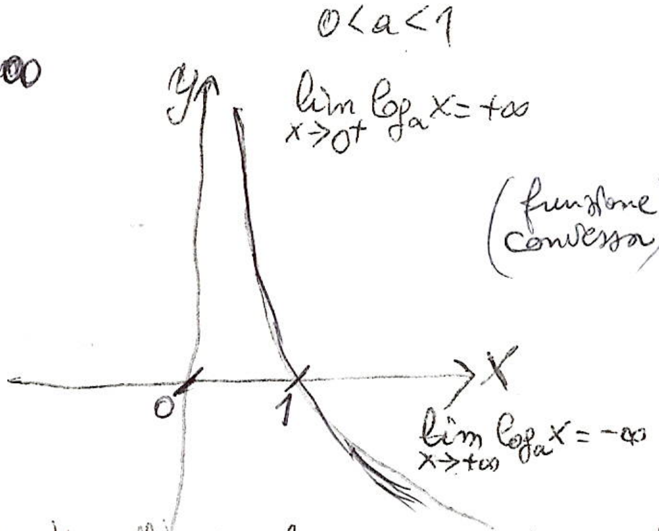
GRAFICO DI a^x $(a>1)$ GRAFICO DI a^x $(0<a<1)$



Ora notiamo che, nel considerare le funzioni inverse, il ruolo dei limiti viene "scambiato" (questo si vede, per esempio, anche quando si considera il grafico della funzione inversa): quindi dai limiti nelle due figure seguirà che: per $a>1$, $\lim_{x\to0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$; se $0<a<1$, $\lim_{x\to0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$.

N.B.: A questo punto possiamo disegnare il grafico della funzione logaritmo (come grafico della funzione inversa!) anche se dobbiamo completare lo studio di questa funzione





Dall'analisi dei 4 limiti nelle due figure si deduce che, in entrambi i casi, la retta $x=0$ (cioè l'asse y) è un asintoto verticale (dal lato destro), mentre non esistono asintoti orizzontali. Prima di studiare gli (eventuali) asintoti obliqui, calcoliamo la derivata (cioè la derivata prima) della funzione $\log_a x$.

Calcoliamo ora $D(\log_a x)$, $a>0$, $a\neq 1$

Ricordiamo ~~il~~ seguente limite notevole:

LN_3) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e \qquad a>0, a\neq 1$

(6 pagine indietro) pag. 93

Per ogni $x>0$, si ha:

$$D(\log_a x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \text{(propietà fondamentali dei logaritmi)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} =$$

(perché il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti)

(N.B.: $\frac{1}{x}$ si considera come una costante, perché x è fissato, e non si fa il limite rispetto ad x)

$$\overset{v=h/x}{=} \frac{1}{x} \cdot \lim_{v\to 0} \frac{\log_a(1+v)}{v}$$

(perché innanzi tutto il limite della costante $\frac{1}{x}$ è $\frac{1}{x}$, cioè il numero stesso, ed $\frac{1}{x}$ è una costante rispetto alla variabile h; inoltre, ponendo $v=\frac{h}{x}$, si ha che, quando h tende a zero, anche v tende a 0)

(vedi limite notevole LN_3) di 6 pagine indietro pag. 93)

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Quindi $\boxed{D(\log_a x) = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e}$.

Nel caso particolare $a=e$, poiché $\ln e = \log_e e = 1$, si ottiene

$$\boxed{D(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Se $a>1$ allora $\ln a>0$ e quindi $D(\log_a x)>0$, essendo $x>0$ (per definizione), quindi la funzione logaritmo è strettamente crescente (si ritrova questa proprietà che sapevamo).

Se invece $0<a<1$, allora $\ln a<0$ e pertanto $D(\log_a x)<0$, essendo $x>0$ ed essendo $D(\log_a x)=\dfrac{1}{x\cdot \ln a}$. Pertanto, per il test di monotonia, ritroviamo che la funzione logaritmo è strettamente decrescente.

Ora calcoliamo la derivata seconda $D^{(2)}(\log_a x)$, tenendo conto che la derivata seconda è la derivata della derivata prima. Si ha:

$$\boxed{D^{(2)}(\log_a x)}= D\left(\frac{1}{x\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}D\left(\frac{1}{x}\right)$$

(la costante moltiplicativa $\frac{1}{\ln a}$ si può portare al di fuori del segno della derivata) $=\boxed{\dfrac{1}{\ln a}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}$

(perché $D\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$, vedi anche pag. 45 di questi appunti)

Se $a>1$, allora $\ln a>0$, $-\frac{1}{x^2}<0$ e quindi $D^{(2)}(\log_a x)<0$ per ogni $x>0$, e pertanto la nostra funzione è $(\cap)$ concava, cioè rivolge la concavità verso il basso. Se invece $0<a<1$, allora $\ln a<0$, $-\frac{1}{x^2}<0$ e quindi $D^{(2)}(\log_a x)>0$ per ogni $x>0$, e quindi la nostra funzione è convessa, cioè rivolge la concavità verso l'alto. $(\cup)$

Vediamo ora la ricerca degli asintoti obliqui per la funzione logaritmo. Essendo il campo di definizione (o campo di esistenza, o insieme di definizione, o dominio) di f uguale a $]0,+\infty[$, allora la ricerca degli asintoti obliqui va fatta solamente dal lato $+\infty$.

Cominciamo dal caso $a > 1$. Si ha: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x}$ è una forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$. Applichiamo il teorema de l'Hôpital. Si ha: $\boxed{m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D(\log_a x)}{D(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{1} = \frac{1}{\ln a} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$ (la costante moltiplicativa è stata portata fuori dal segno di limite).
Essendo $m = 0$, si può già dire subito che non esistono asintoti obliqui. Inoltre, il fatto che $m = 0$, cioè

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$$

sta a indicare che, al tendere di x a $+\infty$, la funzione $\log_a x$ tende a $+\infty$ più lentamente della funzione x. (In realtà si può vedere che "il logaritmo perde sempre", cioè, al tendere di x a $+\infty$, la funzione $\log_a x$ tende a $+\infty$ più lentamente della funzione $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ per ogni numero intero positivo n).
Ora vediamo il caso $0 < a < 1$. Si ha: $m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x}$ è una forma indeterminata $\frac{-\infty}{+\infty}$. Applicando de l'Hôpital, $\boxed{m} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D(\log_a x)}{D(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x \ln a}}{1} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$
e quindi, poiché $m = 0$, possiamo già dire che non ci sono asintoti obliqui (neanche nel caso $0 < a < 1$).

<u>ESERCIZIO</u>: Studiare la funzione

$$\boxed{f(x) = e^x - x - 1}$$

FACENDO IL SEGNO E L'INTERSEZIONE CON GLI ASSI <u>ALLA FINE</u>.

<u>Dominio o campo di esistenza</u>: tutto $\mathbb{R}$.

<u>Asintoti</u>: Si ha: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - x - 1) = +\infty$

perché l'esponenziale è più <u>VELOCE</u> della funzione x, e quindi dal lato $+\infty$ <u>NON CI SONO</u> asintoti orizzontali.

Inoltre, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (e^x - x - 1) = (e^{-\infty} + (+\infty) - 1) =$

$= 0 + (+\infty) - 1 = +\infty$, e quindi gli asintoti orizzontali NON CI SONO neanche dal lato $-\infty$.

<u>NON CI SONO ASINTOTI VERTICALI</u>, perché f è <u>CONTINUA</u> in tutto $\mathbb{R}$.

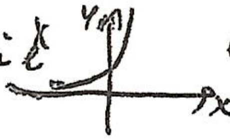
Vediamo gli asintoti obliqui. Cominciamo dal lato $+\infty$. Si ha:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x} - \underbrace{\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}}_{1} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \right) = +\infty - 1 = +\infty$$

(l'esponenziale è più veloce). Quindi dal lato $+\infty$ NON CI SONO ASINTOTI OBLIQUI. Dal lato $-\infty$ si ha

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{e^{x}}{x} - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} \right) = \frac{0^{\nearrow 0}}{-\infty} - 1 - \frac{1^{\nearrow 0}}{-\infty} = -1$$

Notiamo che si ottiene lo stesso risultato con de l'Hôpital. Si ha:

grafico di e^x  $e^{-\infty}=0$, cioè $\lim_{x\to-\infty} e^x=0$

Hôpital

$\boxed{m}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x-1}{x}=\frac{e^{-\infty}-(-\infty)-1}{-\infty}=\frac{0+\infty-1}{-\infty}=\frac{+\infty}{-\infty}$

$=\lim_{x\to-\infty}\frac{D(e^x-x-1)}{D(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{D(e^x)-D(x)-D(1)}{1}=\frac{e^x-1-0}{1}=$

$=e^{-\infty}-1=0-1=\boxed{-1}$. Adesso calcoliamo q. Si ha:

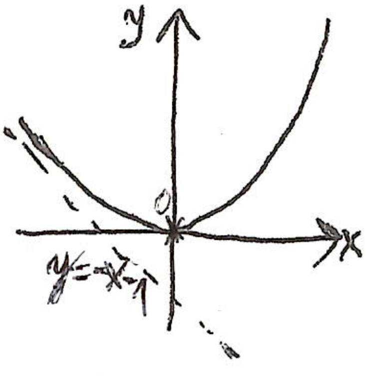
$\boxed{q}=\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x\cancel{-x}-1\cancel{+x})=\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)=$

$=e^{-\infty}-1=0-1=\boxed{-1}$. Pertanto $m=-1, q=-1$, e quindi la retta $y=-x-1$ è un asintoto obliquo per f (dal lato $-\infty$).

<u>DERIVATA</u> (= derivata <u>prima</u>) Si ha: $f(x)=e^x-x-1$, e quindi $f'(x)=D(e^x)-D(x)-D(1)=e^x-1-0=e^x-1$. Si ha:

$f'(x)>0 \overset{\text{se e solo se}}{\iff} e^x-1>0 \iff e^x>1 \iff x>0$. Analogamente, si ha $f'(x)<0 \iff e^x-1<0 \iff e^x<1 \iff x<0$, ed $f'(x)=0 \iff e^x-1=0 \iff x=0$.

Pertanto f è strettamente decrescente in $]-\infty,0]$, strettamente crescente in $[0,+\infty[$, e il punto 0 è un punto di minimo relativo, che è anche di minimo assoluto (come si vedrà dal grafico). Siccome $f(0)=e^0-0-1=1-1=0$, allora $f(x)>0$ per ogni $x\neq0$ (e allora <u>anche da qui</u> si vede che 0 è un punto di minimo assoluto), e il punto $(0,0)$ è l'unica intersezione del grafico di f con gli assi coordinati.



Derivata 2ª di f: $f''(x)=D(f'(x))=D(e^x-1)=$
$=D(e^x)-D(1)=D(e^x)=e^x>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
Pertanto f è <u>convessa</u> in tutto $\mathbb{R}$, cioè rivolge sempre la concavità verso l'alto, e <u>NON CI SONO PUNTI DI FLESSO</u>.

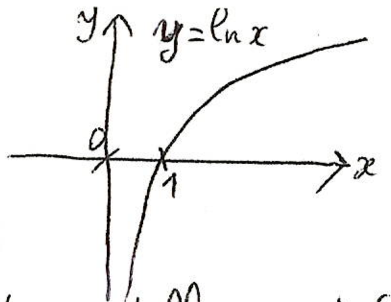
Esercizio: Fare lo studio della funzione

$$f_1(x) = x \ln x$$

- DOMINIO: c'è la limitazione relativa al logaritmo, e

quindi l'argomento del logaritmo dev'essere strettamente positivo, cioè $\boxed{x>0}$. Pertanto il campo di esistenza di f_1 è $]0, +\infty[$ (lo scriviamo nella forma di una semiretta)

- SEGNO DELLA FUNZIONE. Poiché il dominio di f_1 è $]0,+\infty[$, allora x è sempre positivo. Quindi il segno della funzione sarà uguale al segno di $\ln x$. Ricordando il grafico della funzione logaritmo:



$f_1(x) < 0$ se e solo se $0<x<1$
$f_1(x) = 0$ se e solo se $x=1$
$f_1(x) > 0$ se e solo se $x>1$

Abbiamo una sola intersezione con l'asse delle x, cioè $(1,0)$.
Non ci sono intersezioni con l'asse delle y, perché $f_1(0)$ <u>non è definita</u>.

- ASINTOTI. Ricordiamo che il dominio di f_1 è $]0,+\infty[$.
Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$: non esistono asintoti orizzontali.

— Asintoti obliqui. Si ha $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} = +\infty$

quindi non ci sono asintoti obliqui.

— Asintoti verticali. Si ha: $\lim_{x\to0^+} f_1(x) = \lim_{x\to0^+} x\ln x \overset{(*)}{=} \ldots$

(forma indeterminata $0\cdot(-\infty)$, poniamo (trucco!) $\frac{1}{x}=t$.
Allora $x=\frac{1}{t}$, e quando $x\to0^+$ si ha che $t\to+\infty$)

$$\overset{(*)}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t} = \text{(v. proprietà del logaritmo)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\overset{0}{\cancel{\ln 1}} - \ln t}{t} \overset{\text{(Hôpital)}}{=} \lim_{t\to+\infty}\frac{D(-\ln t)}{D(t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{-\frac{1}{t}}{1} = -\frac{1}{+\infty} = 0 \text{ (v. algebra dei limiti)}$$

Pertanto non esistono asintoti verticali.
[Si può vedere anche che $\lim_{x\to0^+} x\ln x = 0$ perché il logaritmo è più lento della funzione x, e quindi può essere trascurato rispetto alla funzione x, cioè: $\lim_{x\to0^+} x\ln x = \lim_{x\to0^+} x = 0$]
ma è meglio dimostrarlo con de l'Hôpital (!)

Derivata prima. E: $f_1(x) = x \ln x$. Usiamo la formula della derivata del prodotto

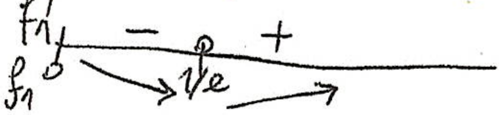
$$f_1'(x) = [\overset{1}{D(x)}] \cdot \ln x + x \cdot D(\ln x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Si ha: $f_1'(x) > 0$ se e solo se $\ln x > -1$ se e solo se $x > e^{-1} = \frac{1}{e}$
(ricordiamo che la funzione $\ln x$ è strettamente crescente, come anche la sua inversa e^x)

Per il TEST M

MONOTONIA

si ha che f_1 è strettamente crescente in $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.
Analogamente, si ha: $f_1'(x) < 0$ se e solo se $(0<)x < e^{-1} = \frac{1}{e}$, e quindi f_1 è strettamente decrescente in $\left]0, \frac{1}{e}\right]$. Il punto $\frac{1}{e}$ è un punto di minimo (che sarà assoluto). Inoltre $f_1'(x) = 0$ se e solo se $x = \frac{1}{e}$,



ed è $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = f_1(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln(e^{-1}) = e^{-1} \cdot (-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$

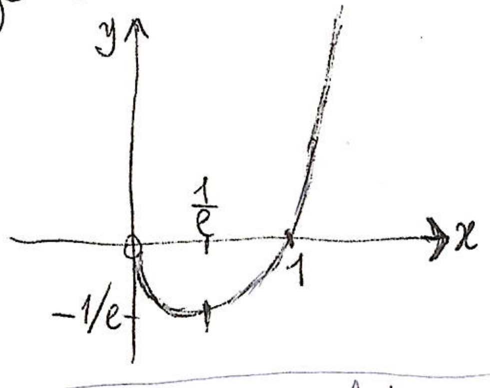
Poiché $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, $-\frac{1}{e}$ è il valore minimo di f_1, allora f_1 non assume valori inferiori a $-\frac{1}{e}$. Inoltre, siccome $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$, f_1 assume tutti i valori compresi fra $-\frac{1}{e}$ e $+\infty$, compreso $-\frac{1}{e}$. Pertanto il codominio di f_1 è esattamente $\left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[$, per il teorema dei valori intermedi.

Poiché $\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = 0$ ed $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, f_1 assume (una volta soltanto, prima di $\frac{1}{e}$, per la stretta decrescenza!) TUTTI i valori compresi fra 0 ed $-\frac{1}{e}$ (0 escluso), ancora una volta per il teorema dei valori intermedi.

Poiché $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$ ed $f_1\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, f_1 assume (una volta soltanto, dopo $1/e$, per la stretta crescenza!) TUTTI i valori compresi fra $-\frac{1}{e}$ e $+\infty$.

Quindi, se prendiamo un qualsiasi valore compreso fra 0 e $-\frac{1}{e}$, estremi esclusi, questo valore viene assunto <u>esattamente</u> <u>DUE</u> VOLTE DA f_1 (una volta, tra 0 e $\frac{1}{e}$, e l'altra volta, tra $\frac{1}{e}$ e $+\infty$). Pertanto f_1 <u>non</u> è iniettiva (globalmente). Visto che il codominio di f_1 è $[-\frac{1}{e}, +\infty[$, allora la restrizione
$f_1: [\frac{1}{e}, +\infty[\to [-\frac{1}{e}, +\infty[$ è iniettiva, perché strettamente crescente, e suriettiva, dato che il codominio di f_1 è $[-\frac{1}{e}, +\infty[$, e pertanto esiste, in corrispondenza alla restrizione considerata, la funzione inversa $f_1^{-1}: [-\frac{1}{e}, +\infty[\longrightarrow [\frac{1}{e}, +\infty[$, anch'essa strettamente crescente.

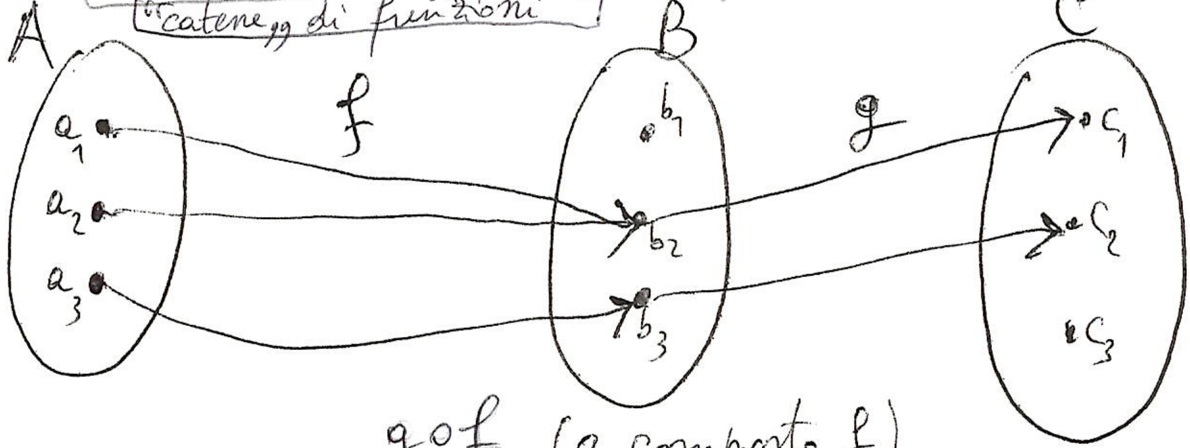
Vediamo ora la derivata seconda. Si ha: $f_1'(x) = \ln x + 1$, mentre $f_1''(x) = D(\ln x + 1) = D(\ln x) + \overset{0}{\cancel{D(1)}} = \frac{1}{x}$, che è sempre >0, in quanto il dominio della nostra funzione f_1 è $]0, +\infty[$.
Pertanto f_1 è convessa in tutto il suo dominio $]0, +\infty[$, cioè rivolge la concavità verso l'alto $(\cup)$.



A questo punto: abbiamo visto quindi le funzioni <u>esponenziali</u> e <u>logaritmiche</u>, oltre ai "<u>rapporti di polinomi</u>", e le abbiamo "combinato" con somme, prodotti e/o simili. Ma se prendiamo 2, 3, ... un numero finito di funzioni da questo "calderone", per descrivere e "modellizzare" adeguatamente molti fenomeni delle Scienze, dobbiamo spesso considerare anche il caso in cui le funzioni si presentano "consecutivamente", "a catena", l'una "legata" all'altra (o alle <u>altre</u>): per esempio le funzioni $\varphi_1(x) = \ln(x^2+4x+13)$, $\varphi_2(x) = e^{-(x+1)^9}$, che sono costituite da "catene di funzioni".
Allora, come si trattano queste "catene di funzioni" (che in linguaggio matematico si chiamano "funzioni composte")?

FUNZIONI COMPOSTE

"catene" di funzioni!



$g \circ f$ (g composto f)

DOPO — g dopo f

$g \circ f$ significa fare prima f e poi g

(Invece, la notazione $f \circ g$ significa fare prima g e poi f)

In generale, $f \circ g$ e $g \circ f$ non sono la stessa cosa.

$$f : A \to B \qquad g : B \to C$$

$$g \circ f : A \to C$$

Affinché abbia senso fare $g \circ f$, si deve avere che il codominio di f deve essere contenuto nel dominio di g, cioè, nel nostro caso, $\boxed{f(A) \subset B}$.

Facciamo un esempio di funzioni composte

Sia $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f_1(x) = x^3 + 2 \quad (\text{per ogni } x \in \mathbb{R})$$

e sia $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $g_1(x) = x - 3$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, dashed, "g_1 \circ f_1"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g_1"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \qquad (g_1 \circ f_1)(x) = \\ = g_1(f_1(x))$$

Innanzi tutto, poiché il dominio di g_1 è tutto $\mathbb{R}$, ha senso parlare di $g_1(f_1(x))$ ($f_1(x)$ è un numero reale, ma ciò non causa problemi perché tanto g_1 è definita su tutto $\mathbb{R}$)

Se sostituiamo $f_1(x)$ con $x^3 + 2$, allora si ha:

$$g_1(f_1(x)) = g_1(x^3 + 2)$$

Adesso, facciamo un po' di attenzione. Se definisco $g_1(x) = x - 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, posso dire anche $\boxed{g_1(t) = t - 3}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ (non c'è problema se si cambia lettera). A questo punto, al posto di t ci mettiamo $x^3 + 2$, ottenendo: $g_1(x^3 + 2) = x^3 + 2 - 3 = x^3 - 1$. Quindi

$$\boxed{(g_1 \circ f_1)(x) = g_1(f_1(x)) = x^3 - 1}, \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g_1"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f_1 \circ g_1"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "f_1"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f_1(x) = x^3+2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$g_1(x) = x-3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x))$

Analogamente come prima, siccome il dominio di f_1 è tutto $\mathbb{R}$, ha senso parlare di $f_1(g_1(x))$.

Se sostituiamo $g_1(x)$ con $x-3$, allora si ha:

$f_1(g_1(x)) = f_1(x-3)$.

Ma $f_1(x) = x^3+2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$: posso scrivere anche $f_1(t) = t^3+2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sostituendo t con $x-3$, si ha

$f_1(x-3) = (x-3)^3+2 = x^3-9x^2+27x-27+2 =$

$= x^3-9x^2+27x-25$. Pertanto,

$(f_1 \circ g_1)(x) = f_1(g_1(x)) = f_1(x-3) = x^3-9x^2+27x-25 \neq$

$\neq (g_1 \circ f_1)(x) = x^3-1$

Quindi, in generale, $(g \circ f) \neq (f \circ g)$, quindi la <u>composizione di funzioni</u> <u>NON</u> <u>È</u> <u>COMMUTATIVA</u> (anche se ci sono dei casi in cui $g \circ f = f \circ g$).

N.B.: $(x-3)^3 = (x-3)\cdot(x-3)\cdot(x-3) = (x-3)\cdot(x^2-3x-3x+9) =$

$= (x-3)\cdot(x^2-6x+9) = x^3-6x^2+9x-3x^2+18x-27 =$

$= x^3-9x^2+27x-27$

Ora diamo una formulazione del teorema di derivazione delle funzioni composte (senza dimostrazione). Supponiamo di avere funzioni definite in insiemi di tipo I, e diamo la seguente formulazione, cercando di renderla abbastanza "intuitiva" (senza pretesa di assoluto rigore formale, ma privilegiando l'aspetto sostanziale)

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE (o "REGOLA DELLA CATENA")

Se f e w sono funzioni derivabili e se ha senso considerare $(f \circ w)(x) = f(w(x))$, se w è derivabile nel punto x ed f è derivabile nel punto $w(x)$, allora $f \circ w$ è derivabile nel punto x, e si ha

$$\boxed{D((f \circ w)(x)) = f'(w(x)) \cdot w'(x)}$$

Per "ricordarsi", detto in modo semplice: "la derivata della funzione composta corrisponde al prodotto delle derivate".

Ma veniamo subito a un esempio: calcolare $D(\ln(x^2-x+3))$

Innanzi tutto, la quantità $\ln(x^2-x+3)$ deve avere senso, e questo ha senso se e solo se l'argomento del logaritmo è positivo, cioè se e solo se $x^2-x+3>0$. Ma x^2-x+3 è un trinomio di secondo grado. Calcoliamo il discriminante $\Delta = b^2-4ac$. Si ha: $a=1$, $b=-1$, $c=3$, e quindi $b^2-4ac = 1-4\cdot 3 = -11<0$. Quindi, essendo $a=1>0$ e $\Delta<0$, il trinomio assume valori sempre positivi, e quindi l'espressione data ha sempre senso per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Calcoliamo ora $D\left(\ln(x^2-x+3)\right)$

Per comodità, riscriviamo la formula di derivazione delle funzioni composte $\boxed{D(f\circ w)(x) = f'(w(x))\cdot w'(x)}$

Poniamo $w = x^2-x+3$ e consideriamo, come funzione "esterna" $f(w) = \ln w$

Calcoliamo la derivata di $f(w)$, ottenendo $f'(w) = \frac{1}{w}$

Sostituiamo w con x^2-x+3, ottenendo

$$f'(w(x)) = \frac{1}{x^2-x+3}$$

Questa quantità la moltiplicheremo per la derivata $w'(x)$ di w, che è uguale a $D(x^2-x+3) = D(x^2)-D(x)+\cancel{D(3)} =$
$= 2x-1$ Pertanto si ottiene: $w'(x) = 2x-1$, e quindi

$$D\left(\ln(x^2-x+3)\right) = f'(w(x))\cdot w'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+3}$$
(per ogni $x\in\mathbb{R}$)

Vediamo ora un altro esempio (è la derivata di una funzione composta che è utile in Probabilità e Statistica)

Sia $h(x) = e^{-x^2}$. Calcolare $h'(x)$.

<u>Svolgimento</u>: si ha $h(x) = f(w(x)) = (f\circ w)(x)$, ove

$w(x) = -x^2$, $f(w) = e^w$

$\downarrow$ funzione "interna" $\downarrow$ funzione "esterna"

Calcoliamo la derivata di $f(w)$ rispetto a w, ottenendo $f'(w) = e^w$ (perché $D(e^w) = e^w$)

Sostituiamo w con $-x^2$, ottenendo $f'(w(x)) = e^{-x^2}$

Calcoliamo la derivata di $w(x)$ rispetto ad x, ottenendo $w'(x) = -2x$

In virtù della formula di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\boxed{h'(x)} = f'(w(x))\cdot w'(x) = e^{-x^2}\cdot(-2x) = \boxed{-2x\,e^{-x^2}}$$

Adesso, come uso e applicazione delle derivate delle funzioni composte, calcoleremo la derivata della funzione x^b ove b è un numero reale qualunque fissato (quindi la considereremo definita in $]0,+\infty[$, cioè per $x>0$, come abbiamo fatto nel definire le potenze a esponente irrazionale, anche se – per esempio – la funzione $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, e la funzione $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ è definita in $[0,+\infty[$).

Consideriamo ora due funzioni (definite in un insieme I di tipo I) $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$, tali che $h(x)>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora è ben definita la quantità $h(x)^{g(x)}$, e si ha anche $h(x)^{g(x)}>0$ (in quanto abbiamo visto che, se $a>0$ e z è un numero reale qualsiasi, risulta $a^z>0$).

Poniamo $s = h(x)^{g(x)}$: allora è ben definita la quantità $\ln s$. Per le proprietà delle funzioni inverse, si ha:

$s = e^{\ln s}$, vale a dire $\boxed{h(x)^{g(x)}} = e^{\ln(h(x)^{g(x)})} =$

(per le proprietà dei logaritmi) $= \boxed{e^{g(x) \cdot \ln(h(x))}}$

Questo è un trucco da tenere molto ben presente. Quindi,

$$\boxed{h(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(h(x))}}$$

che si scrive anche, in sintesi

$$\binom{**}{\circ\circ} \quad \boxed{h^g = e^{g \cdot \ln h}}$$

Ora, sia $x>0$, $b \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Da $\binom{**}{\circ\circ}$ si ricava, ponendo $x=h$, $g=b$:

$$\boxed{x^b = e^{b \cdot \ln x}}$$

Sia ora b un qualunque numero ~~reale~~ reale fissato.
Per ogni $x>0$ si ha $\boxed{x^b = e^{b \cdot \ln x}}$. Calcoliamo la derivata $D(x^b) = D(e^{b\cdot \ln x})$. A questo scopo, poniamo $w(x) = b \cdot \ln x$ (funzione "interna"), $f(w) = e^w$ (funzione "esterna"). Allora $e^{b\cdot \ln x} = f(w(x)) = (f \circ w)(x)$,
e allora, in virtù della formula di derivazione delle funzioni composte, otteniamo

$$\boxed{D(x^b)} = D(e^{b\cdot \ln x}) = D((f\circ w)(x)) = f'(w(x)) \cdot w'(x) =$$

$$= D(e^w)_{|w=w(x)} \cdot D(b \cdot \ln x) = e^{w(x)} \cdot b \cdot D(\ln x) =$$

(portando la costante moltiplicativa fuori dal segno di derivata...)

$$= b \cdot e^{b\cdot \ln x} \cdot \frac{1}{x} = b \cdot x^b \cdot x^{-1} = \boxed{b\, x^{b-1}}$$ (proprietà delle potenze)

Quindi

$$\boxed{D(x^b) = b \cdot x^{b-1}}$$

Nel caso particolare $b = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\boxed{D\left(x^{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \boxed{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}$$, cioè

$$D(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{per } x>0$$

(vedi proprietà delle potenze)

(Avevamo visto che la funzione $\sqrt{x}$ è definita per $x \geq 0$, derivabile (solo) per $x>0$, in quanto il punto 0 è di NON derivabilità)

Nel caso particolare $b = \frac{1}{3}$, si ottiene

$$\boxed{D\left(x^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}$$, cioè, per le proprietà delle potenze,

$$\boxed{D(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$$

; questo lo abbiamo ottenuto per $x>0$ (ma si può vedere che vale anche per $x<0$ (la radice cubica è definita in tutto $\mathbb{R}$))
Invece il punto 0 – ricordiamo – è un punto di NON DERIVABILITÀ per la funzione $\sqrt[3]{x}$.

ESERCIZI VARI (MOLTO IMPORTANTI)

1) Dimostriamo il limite notevole (MOLTO IMPORTANTE)

$$LN_1) = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad , a>0, a \neq 1$$ di pag. 93

Poiché $a^0 = 1$, siamo davanti a una forma del tipo $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$, forma indeterminata. Applicando il teorema de l'Hôpital, si ha

$$\boxed{LN_1) =} \lim_{x \to 0} \frac{D(a^x - 1)}{D(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{D(a^x) - \overset{=0}{D(1)}}{1} = \lim_{x \to 0} D(a^x) =$$

$= \lim_{x \to 0} a^x \ln a =$ (la costante la portiamo fuori dal segno di limite) $= (\ln a) \cdot \lim_{x \to 0} a^x = (\ln a) \cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{a^0}}$ (la funzione esponenziale è continua) $= \boxed{\ln a}$, come volevamo provare

2) Proviamo ora il limite notevole (MOLTO IMPORTANTE)

$$LN_3) = \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a>0, a \neq 1$$ di pag. 93

Poiché $\log_a(1+0) = \log_a 1 = 0$, siamo davanti a una forma $\frac{0}{0}$. Per de l'Hôpital,

$$LN_3) = \lim_{x \to 0} \frac{D(\log_a(1+x))}{\underset{=1}{D(x)}} = \lim_{x \to 0} D(\log_a(1+x))$$

Calcoliamo $D(\log_a(1+x))$. Poniamo $f(w) = \log_a w$ (funzione ESTERNA), (derivata di funzione composta)

$w(x) = 1+x$ (funzione INTERNA) Si ha: $f'(w) = \frac{1}{w \cdot \ln a}$, e

sostituendo w con $w(x) = 1+x$, si ha $f'(w(x)) = \frac{1}{w(x) \cdot \ln a} = \frac{1}{(1+x) \cdot \ln a}$

Inoltre, $w'(x) = D(1+x) = D(1) + D(x) = 0+1 = 1$. Per la derivazione delle funzioni composte, è $D(\log_a(1+x)) = D((f \circ w)(x)) = f'(w(x)) \cdot w'(x) = \frac{1}{(1+x) \cdot \ln a} \cdot 1$

Quindi $LN3) = \lim_{x \to 0} D(\log_a(1+x)) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(1+x) \cdot \ln a} = \frac{1}{\ln a}$ come volevamo dimostrare

3) Dimostriamo il seguente limite "quasi notevole" (MOLTO IMPORTANTE)

$$LQN = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$$

Applichiamo il trucco $h^g = e^{g \cdot \ln h}$, ove $h = n$, $g = \frac{1}{n}$.

Si ha: $LQN = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\cdot \ln n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$

Notiamo che "il limite dell'esponente" ossia $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}$, è uguale a 0 perché il logaritmo è più lento (avevamo precedentemente visto che $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$ per ogni $a > 1$, quindi anche $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, e di conseguenza anche "la restrizione fatta con i numeri interi positivi, o naturali, tende a 0" cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$). Adesso, usando <u>LA CONTINUITÀ DELLA FUNZIONE ESPONENZIALE</u>, otteniamo

$$LQN = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^{\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}\right)} = e^0 = 1,$$ come volevamo provare.

(qui gioca la continuità: "il limite della funzione è uguale al valore della funzione nel "punto limite"!)

4) Calcolare $\mathcal{L}_4 = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$ (È una forma indeterminata del tipo $1^{\pm\infty}$)

Usiamo il trucco $\boxed{h^g = e^{g\cdot \ln h}}$, con $h = 1+x$, $g = \frac{1}{2x}$, si ha:

$\mathcal{L}_4 = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x}\cdot \ln(1+x)} =$ (per la continuità della funzione esponenziale)

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x}\cdot \ln(1+x)}$. Il limite all'esponente è $\frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{2}$, in quanto $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (limite notevole LN_4) pag. 93). Quindi

$\mathcal{L}_4 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

Esercizio: calcolare

$$\mathcal{L}_5 = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right).$$

Come si fanno limiti di questo tipo (viene una forma indeterminata del tipo $(+\infty)-(+\infty)$) quando ci sono le radici quadrate? Il trucco è pensare a

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2} \quad \text{da cui} \quad a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b},$$

ove prendiamo $a=\sqrt{x+1}$, $b=\sqrt{x-1}$. Si ha: $a^2 = x+1$, $b^2 = x-1$, e quindi

$$\mathcal{L}_5 = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \frac{2}{(\sqrt{+\infty})+(\sqrt{+\infty})} = \frac{2}{(+\infty)+(+\infty)} =$$

$$= \frac{2}{+\infty} = 0$$

(N.B.: $\sqrt{+\infty} = +\infty$, cioè $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, in quanto $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$) (v. anche la costruzione della radice quadrata come funzione inversa del quadrato, pagine 76 e 78).

Esercizio: Calcolare

$$\mathcal{L}_6 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$$

Adoperiamo il trucco dell'esercizio precedente: $a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b}$, con $a=\sqrt{2+x}$, $b=\sqrt{2-x}$. Si ha: $a^2 = 2+x$, $b^2 = 2-x$, da cui

$$\mathcal{L}_6 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x)-(2-x)}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\cancel{2}+x-\cancel{2}+x}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{2\cancel{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}$$ (la radice quadrata è una funzione continua) $=$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\mathcal{L}_7$: Ecco un'altra proprietà MOLTO IMPORTANTE,
Proviamo che il LOGARITMO, al tendere di x a $+\infty$, è PIÙ LENTO di $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè

$$\mathcal{L}_7 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$$

Notiamo che si tratta di una forma $\frac{+\infty}{+\infty}$ $\left(\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{n}} = +\infty\right.$: v. anche p. 81$\left.\right)$
Applicando de l'Hôpital, si ha

$$\mathcal{L}_7 = \lim_{x \to +\infty} \frac{D(\ln x)}{D(x^{1/n})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{n} x^{1/n - 1}} = \left(\begin{array}{c}\text{proprietà} \\ \text{delle} \\ \text{potenze}\end{array}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^{-1}}}{\frac{1}{n} \cdot x^{1/n} \cdot \cancel{x^{-1}}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot (+\infty)} \overset{\text{(algebra}}{\underset{\text{dei limiti)}}{=}} \frac{1}{+\infty} = 0,$$

come volevamo dimostrare.

$$\mathcal{L}_8 \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \frac{4}{3}$$

Si tratta di una forma del tipo $\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$, quindi indeterminata. Con de l'Hôpital e usando le proprietà delle potenze, si ha:

$$\boxed{\mathcal{L}_8} = \lim_{x \to 1} \frac{x^{1/3} - 1}{x^{1/4} - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{D(x^{1/3} - 1)}{D(x^{1/4} - 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{D(x^{1/3}) - \overset{=0}{D(1)}}{D(x^{1/4}) - \underset{=0}{D(1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \overset{=1}{1^{-\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{4} \cdot \underset{=1}{1^{-\frac{3}{4}}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{1} = \boxed{\frac{4}{3}}$$, come volevamo provare.

~~1~~ $_9$. Calcolare

$$\mathcal{L}_9 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 \quad \left(\text{forma } \frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Si ha:

$$\mathcal{L}_9 = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{D(\ln(x+1))}{D(\ln x)} = \text{(applichiamo}$$

il teorema di derivazione delle funzioni composte, con funzione interna $w(x) = x+1$, $f(w) = \ln w$ (funzione esterna)), $f'(w) = \frac{1}{w}$, $f'(w(x)) = \frac{1}{x+1}$, $w'(x) = D(x+1)$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{w} \cdot D(x+1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1}(D(x) + D(1))}{\frac{1}{x}} \text{ (la}$$

derivata della somma è uguale alla somma delle derivate) =

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1}(1+0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} \overset{\text{trucco}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-1}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\cancel{x+1}}{\cancel{x+1}} - \frac{1}{x+1} \right) = \text{(il limite della differenza è la}$$

differenza dei limiti) $\lim_{x \to +\infty} 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} =$

(il limite di una costante è la costante stessa)

$$= 1 - \frac{1}{+\infty} = 1 - 0 = 1$$

---

oppure, per il principio di sostituzione degli infiniti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{(tecnica più veloce)}$$

ESERCIZIO:

Fare lo studio della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^2+1)$$

Visto che c'è il logaritmo, affinché abbia senso quello che c'è scritto, dev'essere $x^2+1>0$ (perché x^2+1 è l'argomento del logaritmo). Questo è sempre verificato, e quindi il dominio o campo di esistenza di f è tutto $\mathbb{R}$.

Vediamo ora il segno e l'intersezione con gli assi. Si ha:

$$f(x)>0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\Longleftrightarrow}} \ln(x^2+1)>0 \Leftrightarrow x^2+1>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

Se $x=0$, si ha $f(0)=\ln(0+1)=\ln 1=0$. Quindi $f(x)>0$ per ogni $x\neq 0$ ed $f(x)=0$ se e solo se $x=0$.

L'unica intersezione con gli assi cartesiani è il punto $(0,0)$.

ASINTOTI: Siccome f è continua in tutto $\mathbb{R}$, allora NON CI SONO ASINTOTI VERTICALI.

Cerchiamo gli asintoti orizzontali. Si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2+1) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

e quindi f non ammette asintoti orizzontali.

Vediamo gli asintoti obliqui. Si ha: $(f(x) = \ln(x^2+1))$

$$\boxed{m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0$$ (perché il logaritmo è meno veloce. Si può vedere questo anche con il teorema de l'Hôpital

$(w(x) = x^2+1, D(\ln w) = 1/w$, funzione composta)

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1} \cdot D(x^2+1)}{1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2+1} =$$

= (principio di sostituzione degli infiniti) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x^2} = \left(\frac{2}{\pm\infty}\right) = \boxed{0}$.

Siccome $m = 0$, f non ammette asintoti obliqui.

Derivata prima: $D(\ln(x^2+1)) = \frac{1}{x^2+1} D(x^2+1) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\begin{cases} \ln w \\ w = x^2+1 \\ w' = 2x \end{cases}$

(per la regola di derivazione delle funzioni composte) $D(\ln w) = \frac{1}{w}$

Si ha: $\frac{2x}{x^2+1} > 0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\Longleftrightarrow}} x > 0$, $\frac{2x}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\frac{2x}{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Quindi f è strettamente decrescente per $x \in]-\infty, 0]$, è strettamente crescente per $x \in [0, +\infty[$ ed ammette un punto di minimo nel punto 0, dove f vale 0. Notiamo che 0 è un punto di minimo ASSOLUTO, perché $f(0) = 0$ ed $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, come avevamo visto in precedenza.

Calcoliamo la derivata seconda di f. È: $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, quindi (formula di derivazione del quoziente)

$$f''(x)=\frac{[D(2x)]\cdot(x^2+1)-2x\cdot D(x^2+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

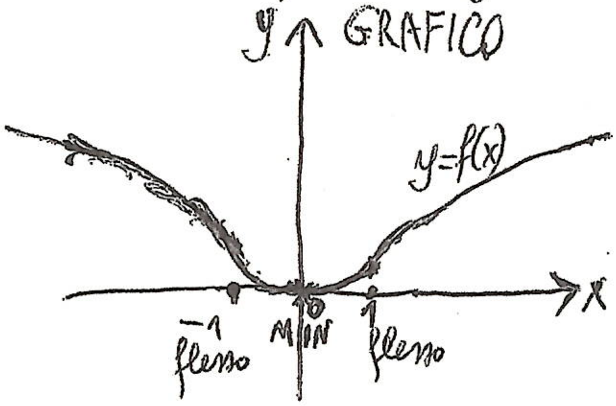
$$=\frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$ Studiamo il segno di f''.

Si ha: $f''(x)>0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\Longleftrightarrow}} 2-2x^2>0 \Leftrightarrow x^2-1<0$ $\begin{pmatrix}x=\pm 1\\ \text{VALORI}\\ \text{INTERNI}\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow -1<x<1$. Analogamente si vede che

$f''(x)<0 \overset{\text{se e}}{\underset{\text{solo se}}{\Longleftrightarrow}} x>1$ oppure $x<-1$, ed $f''(x)=0$

se e solo se $x=1$ oppure $x=-1$. Quindi f è convessa (cioè rivolge la concavità verso l'alto $\cup$) per $x\in[-1,1]$, f è concava (cioè rivolge la concavità verso il basso $\cap$) per $x\in]-\infty,-1]$, f è concava per $x\in[1,+\infty[$, e i punti $1,-1$ sono punti di flesso. Il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, perché la funzione è <u>pari</u>: infatti, $f(-x)=\ln((-x)^2+1)=$
$=\ln(x^2+1)=f(x)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.



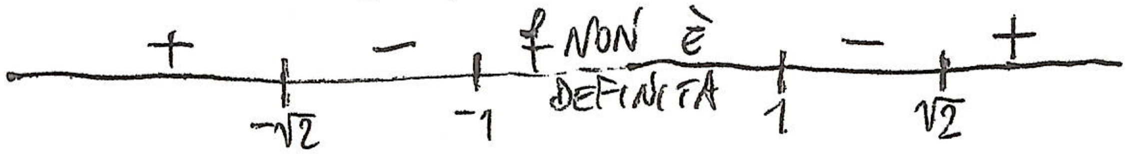
<u>Esercizio</u>: Fare lo studio della seguente funzione:

$$f(x) = \ln(x^2-1)$$

Dominio o campo di esistenza di f:
affinché il logaritmo abbia senso, dev'essere $x^2-1>0$ (cioè l'argomento del logaritmo dev'essere strettamente positivo). Le radici dell'equazione associata $x^2-1=0$ sono $x=\pm1$ (perché $x^2=1$) quindi si ha $x^2-1>0$ per valori esterni cioè $x>1$ oppure $x<-1$. Quindi il dominio della funzione è

$$\text{Dom} f =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[.$$

<u>Segno della funzione</u>: Si ha: $\ln(x^2-1)>0$ ~~se~~ e solo se $x^2-1>e^0=1$, cioè $x^2-2>0$ (le radici dell'equazione associata $x^2-2=0$, ossia $x^2=2$, sono $x=\pm\sqrt{2}$) per valori esterni, cioè f è positiva in $]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},+\infty[$,



ed f è negativa in $]-\sqrt{2},-1[\cup]1,\sqrt{2}[$, cioè per valori interni a $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$ escluso $[-1,1]$, che NON FA PARTE DEL CAMPO DI ESISTENZA. La funzione f si annulla in $-\sqrt{2}$ ed in $\sqrt{2}$, e dunque le intersezioni del grafico di f con l'asse delle x sono i punti $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},0)$, mentre il grafico di f <u>non</u> <u>ha</u> intersezioni con l'asse y, in quanto f <u>NON È DEFINITA</u> in 0.

ASINTOTI: Si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2-1) = \ln(+\infty) = +\infty$
e quindi non ci sono asintoti orizzontali.

Adesso cerchiamo gli asintoti obliqui. Consideriamo dapprima

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = 0$$ perché "il logaritmo è più lento". SPIEGAZIONE MATEMATICA:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} \overset{\text{Hôpital}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{D(\ln(x^2-1))}{D(x)} = \ldots^{(1)}$$

[N.B.: $D(\ln(x^2-1)) = D(\ln w)\cdot D(x^2-1) = \frac{1}{w}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$, perché "la derivata delle funzioni composte è uguale al prodotto delle derivate"]
$\begin{cases} \ln w \\ w = x^2-1 \\ w' = 2x \end{cases}$

$$\overset{(1)}{\ldots} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2x}{x^2-1}}{1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x^2} = 0$$ (per il principio di sostituzione degli infiniti). Quindi $m=0$, che NON VA BENE (se c'è un asintoto di equazione $y = mx+q$, allora m dev'essere diverso da 0, perché l'asintoto è OBLIQUO).

Vediamo ora gli asintoti verticali, tenendo conto che

$$\text{Dom } f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Si ha: $\lim_{x\to 1^+} \ln(x^2-1) = \ln(0^+) = -\infty$, e analogamente $\lim_{x\to -1^-} \ln(x^2-1) = \ln(0^+) = -\infty$. Quindi le rette $x=1$ ed $x=-1$ sono ASINTOTI VERTICALI.

DERIVATA PRIMA

Abbiamo già visto che $D(f(x)) = D(\ln(x^2-1)) = \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Studiamo il segno della derivata

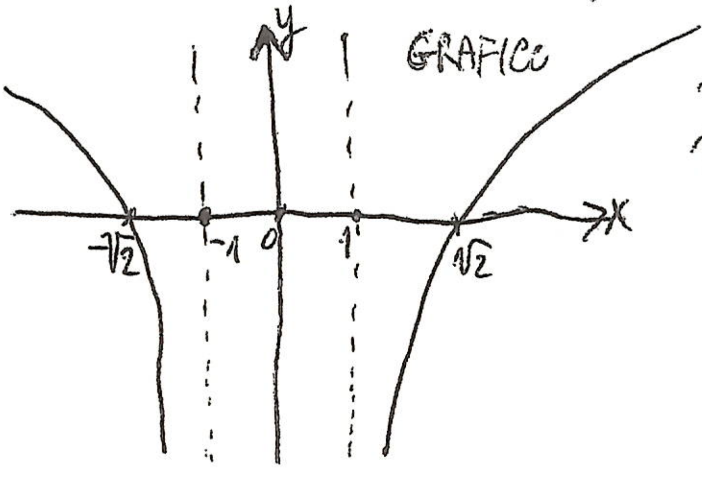
		-1		0		1	
Numeratore	$-$		$-$	0	$+$		$+$
Denominatore	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
f' = Frazione	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

<u>ATTENZIONE</u>! Devo $\boxed{\text{escludere}}$ i punti $x \in [-1,1]$ che <u>NON</u> APPARTENGONO AL DOMINIO DI f. Quindi f' è <u>positiva</u> in $]1,+\infty[$ e <u>negativa</u> in $]-\infty,-1[$. Quindi, in virtù del TEST DI MONOTONIA, f è <u>STRETTAMENTE CRESCENTE</u> in $]1,+\infty[$ e <u>STRETTAMENTE DECRESCENTE</u> in $]-\infty,-1[$.

DERIVATA SECONDA: si ha: $f''(x) = D(f'(x)) = D\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right) =$

$$= \frac{[D(2x)]\cdot(x^2-1) - 2x\cdot D(x^2-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{2(x^2-1) - 2x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x^2-2}{(x^2-1)^2}$$ sempre < 0. Pertanto f rivolge sempre la sua concavità <u>verso il basso</u> (f è concava)



Inoltre il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y, ed f è PARI: infatti, per ogni $x \in \mathrm{Dom}\, f$, si ha
$f(-x) = \ln((-x)^2-1) = \ln(x^2-1) = f(x)$.

ESERCIZIO

La seguente funzione svolge un ruolo molto importante nella distribuzione normale di Gauss e negli integrali, ed è molto usata in Probabilità e Statistica.

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Notiamo, innanzi tutto, che il campo di esistenza di f (o dominio di f) D_f è tutto $\mathbb{R}$.
- Siccome la funzione esponenziale assume sempre valori positivi, allora $f(x)$ è sempre POSITIVA e non si annulla mai. Non ci sono quindi intersezioni con l'asse delle x. Inoltre $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, e quindi il punto $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$ è l'(unica) intersezione con l'asse delle y.
- Vediamo gli asintoti. Si ha: $\lim_{x \to \pm\infty} -\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (+\infty) = -\infty$, e quindi

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0,$$

in quanto $\lim_{* \to -\infty} e^{*} = 0$. Pertanto la retta $y = 0$ (cioè l'asse delle x) è un asintoto orizzontale, sia dal lato $+\infty$ che dal lato $-\infty$. Di conseguenza, non vi sono asintoti obliqui.

Poiché f è continua (composizione di funzioni continue) su tutto $\mathbb{R}$, allora f non ha asintoti verticali.

— Calcoliamo la derivata (cioè la derivata prima) di f. Applichiamo la regola iii) (in base alla quale una costante moltiplicativa, nel nostro caso $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, può essere portata dentro e fuori dal segno di derivata) e applichiamo il teorema di derivazione delle funzioni composte con $w(x) = -\frac{x^2}{2}$. Si ha:

$$\begin{cases} w(x) = -x^2/2 \\ D(e^w) = e^w \\ D(e^{-x^2/2}) = e^{-x^2/2} \cdot D\left(-\frac{x^2}{2}\right) = e^{-x^2/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot D(x^2) \end{cases}$$

$$D\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot D\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{w} \cdot D\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} D(x^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Essendo l'esponenziale di una qualsiasi cosa (purché abbia senso) una quantità sempre positiva, allora $f'(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, $f'(x) < 0$ se e solo se $x > 0$, $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Pertanto f è strettamente crescente in $]-\infty, 0]$, strettamente decrescente in $[0, +\infty[$ (per il <u>test di monotonia</u>) e il punto 0 è un punto di massimo (dal grafico si vede che è un punto di massimo <u>ASSOLUTO</u>).

– Ricordiamo che $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,

e calcoliamo la <u>derivata seconda</u> $f''(x)$, cioè la derivata di $f'(x)$. Adoperiamo la regola ii) di derivazione del prodotto, la regola iii) che afferma che una costante moltiplicativa può essere portata dentro e fuori dal segno di derivata, e la regola di derivazione delle funzioni composte. Si ha:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} D\left(x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[(D(x)) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \right.$$

$$\left. + x \cdot D\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \right]$$ (ma noi sappiamo già che $D\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} - x \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right) =$$

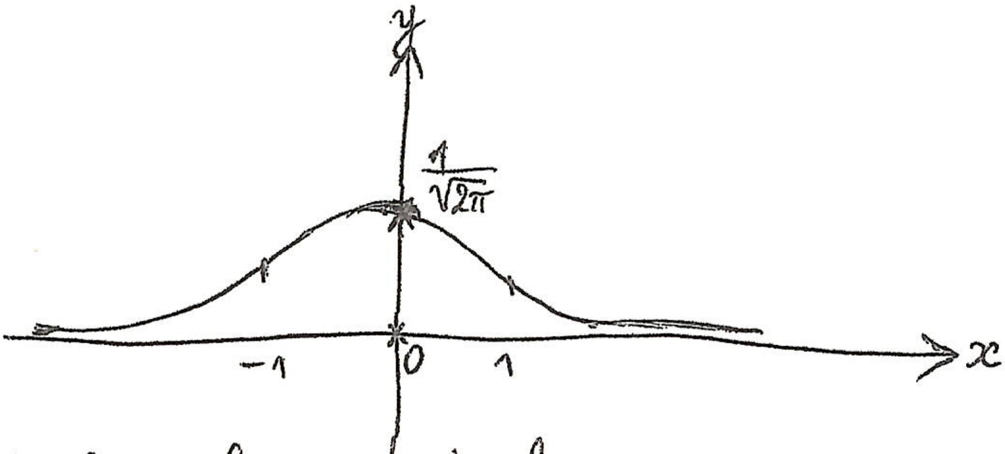
$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (1 - x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (x^2 - 1)$$

Quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x^2 - 1 > 0$; $f''(x) < 0$ se e solo se $x^2 - 1 < 0$; $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2 - 1 = 0$, cioè $x^2 = 1$, ossia $x = 1$ oppure $x = -1$. Quindi $f''(x) > 0$ se e solo se $x > 1$ oppure $x < -1$ (valori esterni); $f''(x) < 0$ se e solo se $-1 < x < 1$ (valori interni). Pertanto f è convessa in $]-\infty, -1]$, concava in $[-1, 1]$, convessa in $[1, +\infty[$.
I due punti $x = 1$, $x = -1$ sono i due punti di FLESSO (in corrispondenza dei quali "cambia la concavità/convessità"),

GRAFICO DELLA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

("CAMPANA DI GAUSS")



Dal grafico si vede che:

- la funzione f è simmetrica rispetto all'asse delle y, cioè è pari: infatti
$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = f(x);$$
- il punto O è un punto di MASSIMO ASSOLUTO ed $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
- il codominio di f è esattamente l'intervallo $]0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}]$ (0 escluso, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ compreso)

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Tra i fenomeni che si studiano nei diversi rami delle Scienze (e soprattutto in Fisica) ce ne sono tantissimi le cui leggi vengono espresse mediante "combinazioni" (detto in modo semplice) di funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente, cotangente): per esempio citiamo, tanto per nominare qualcosa, il pendolo, il moto armonico, il lavoro di una forza ...... eccetera .....

Nelle prossime pagine vedremo che cosa succede con i limiti, le derivate .. e via dicendo ... nello studio delle funzioni trigonometriche. E allora rivediamo e riprendiamo i primi elementi di Trigonometria che abbiamo visto nel Percorso/Parte 1 e che comunque, si devono sapere sempre.

TRIGONOMETRIA

(Misura degli angoli, studio delle proprietà fondamentali dei triangoli, ...)

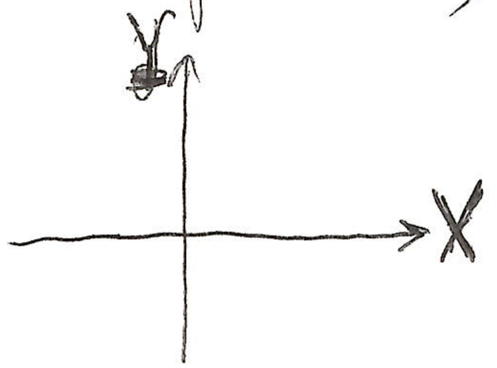
È una scienza antichissima, con moltissime applicazioni.

A CHE COSA SERVE? PER ESEMPIO:

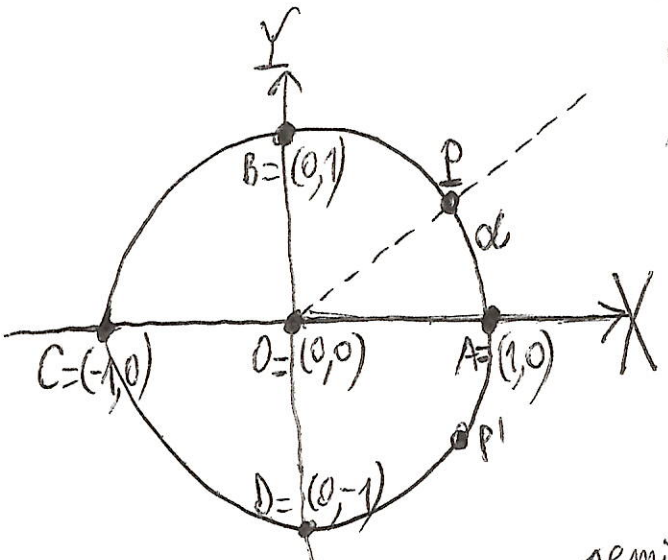
1) Calcolare l' altezza di monumenti senza arrampicarsi
2) Calcolare la distanza fra due punti inaccessibili, e anche le distanze astronomiche, per esempio Terra-Luna, Terra-Sole, la distanza tra il Sole e una stella.....
3) Svariatissime applicazioni in Fisica (p. es. pendolo, moto armonico ...) e in altre rami delle Scienze.......

Parleremo degli angoli, e delle cosiddette "funzioni trigonometriche" (seno, coseno, tangente, cotangente di un angolo ...)

Come prima cosa, consideriamo il <u>piano cartesiano</u>



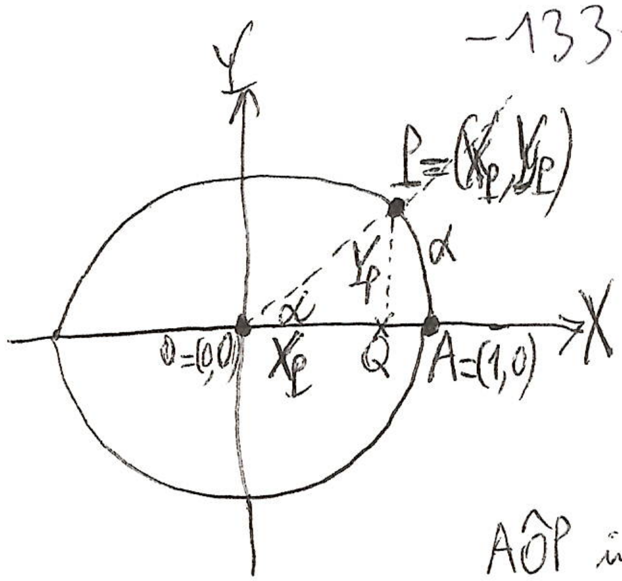
e poi disegniamo la <u>CIRCONFERENZA GONIOMETRICA</u>, cioè la circonferenza di centro l'origine degli assi cartesiani $O=(0,0)$ e raggio 1, cioè il luogo geometrico di tutti i punti P del piano cartesiano tali che la distanza OP dall'origine è uguale a 1 (Questa distanza OP è proprio il RAGGIO della nostra circonferenza).



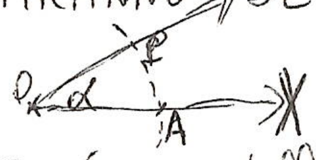
Adesso consideriamo la semiretta OP (prolungando il segmento OP "dalla parte di P") e il semiasse positivo delle X.

Ad ogni punto P della circonferenza goniometrica associamo la lunghezza α dell'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AP}$ che ha come primo estremo il punto $A=(1,0)$ e come secondo estremo il punto P, e in cui LA CIRCONFERENZA VIENE PERCORSA IN SENSO ANTIORARIO.

Esempio: Se consideriamo il punto P', come arco $\overset{\frown}{AP'}$ non prenderemo il "cammino più breve" da A a P' (altrimenti la circonferenza sarebbe percorsa in senso orario), ma il cammino "lungo" che parte da A, passa per i punti B, C e D, e arriva a P'.

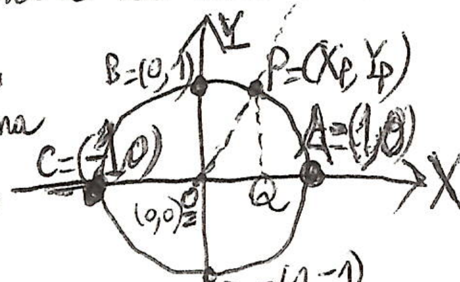


Quindi ad ogni punto P della circonferenza goniometrica associamo la lunghezza α dell'arco di circonferenza $\overset{\frown}{AP}$ come abbiamo detto nella pagina precedente. L'angolo $A\hat{O}P$ in figura (determinato dal semiasse positivo delle X e dalla semiretta OP "dalla parte di P") sarà identificato con la lunghezza α dell'arco $\overset{\frown}{AP}$ e sarà indicato sempre con la lettera α. I nostri angoli PARTIRANNO SEMPRE DAL SEMIASSE POSITIVO DELLE X

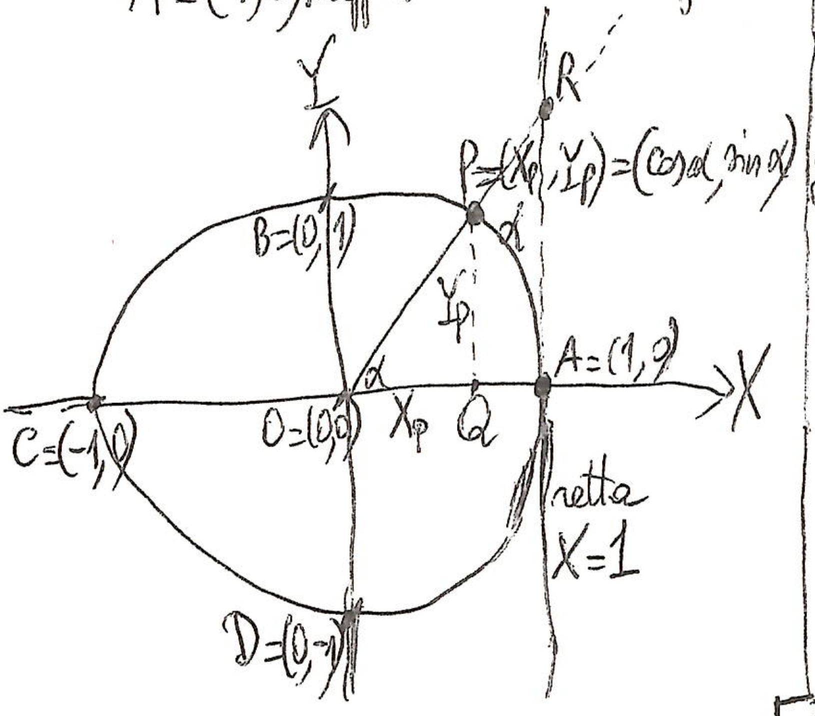


e, siccome sono "costruiti" su due semirette (una delle quali - per l'appunto - è il semiasse positivo delle X), possiamo sempre considerare il punto di intersezione P tra la seconda semiretta e la circonferenza goniometrica. Il punto P, naturalmente, fa parte del piano cartesiano e quindi avrà la sua ascissa X_P e la sua ordinata Y_P. Per definizione, chiameremo coseno di α ($\cos\alpha$) la quantità X_P e seno di α ($\sin\alpha$) la quantità Y_P, cioè il coseno di α sarà la lunghezza del segmento OQ, mentre il seno di α sarà la lunghezza del segmento QP.

Se $X_P \neq 0$, cioè se $P \neq B=(0,1)$ e $P \neq D(0,-1)$, si chiama tangente di α (tg α oppure tan α) la quantità $\boxed{\frac{Y_P}{X_P}}$, cioè $\text{tg}\,\alpha = \tan\alpha = \boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{QP}{OQ}$.



Sia R il punto che si ottiene prolungando la semiretta OP dalla parte di P e facendo l'intersezione di questa semiretta con la retta $X=1$, cioè con la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $A=(1,0)$. Rappresentiamo la tangente con ~~un~~ UNICO SEGMENTO.



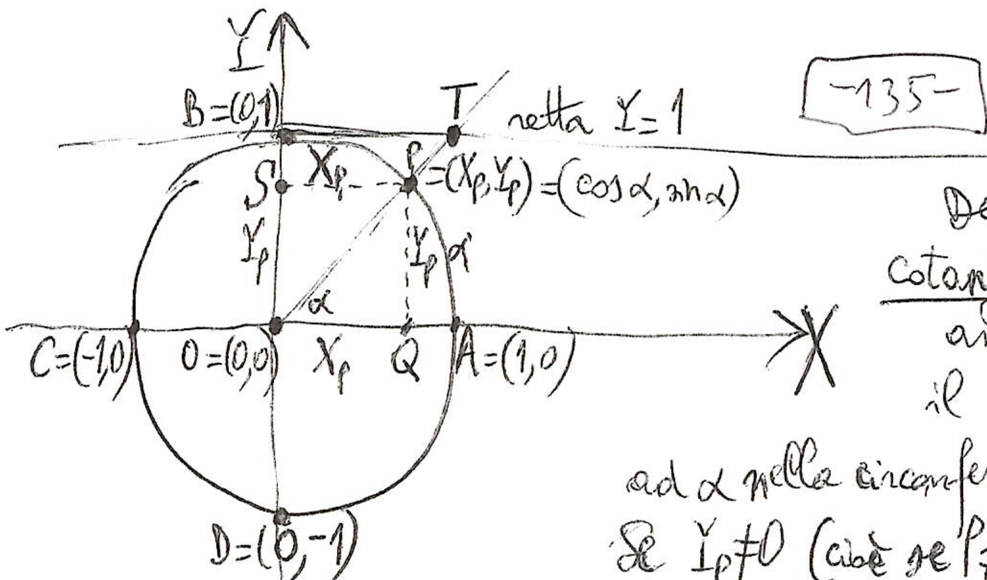
Dimostriamo che $tg\,\alpha = \overline{AR}$.

I triangoli OQP e OAR hanno gli angoli uguali; infatti gli angoli $P\hat{O}Q$ e $R\hat{O}A$ sono uguali ad α, gli angoli $P\hat{Q}O$ e $R\hat{A}O$ sono uguali perché sono retti. Se due triangoli hanno due angoli uguali, allora hanno tutti e tre gli angoli uguali, perché la somma degli angoli di ogni triangolo è sempre costante [(più precisamente, è uguale sempre all'angolo associato alla lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AC}$, cioè della semicirconferenza, e sarà espresso da π, perché la lunghezza della circonferenza di raggio R è $2\pi R$, quindi la lunghezza della circonferenza di raggio 1 è 2π, e allora la lunghezza della semicirconferenza di raggio 1 è π; come vedremo in seguito, π corrisponde a 180° (180 gradi), cioè all' "angolo piatto").]

Quindi i triangoli OQP e OAR hanno tutti e tre gli angoli uguali; dunque sono SIMILI, e quindi hanno le lunghezze dei rispettivi lati IN PROPORZIONE. In particolare, $\frac{QP}{OQ} = \frac{AR}{OA} = AR$, in quanto la lunghezza $OA = 1$, perché RAGGIO della circonferenza goniometrica. Allora $AR = \frac{QP}{OQ} = \frac{Y_P}{X_P} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = \tan\alpha$.

Quindi la tangente dell'angolo α è espressa dalla lunghezza del segmento AR, come volevamo dimostrare.

N.B.: ~~Si~~ ha: $tg\,\alpha$ = coefficiente angolare della retta OP (!!!)



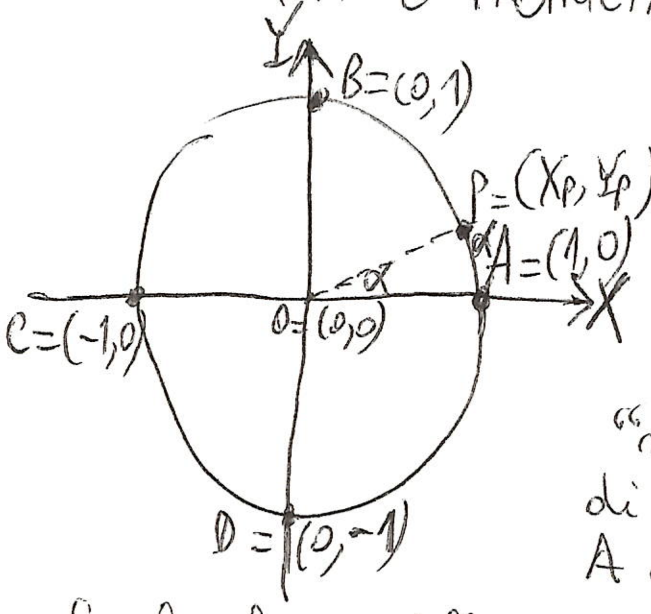
Definiamo ora la cotangente di un angolo α. Sia P il punto che "corrisponde" ad α nella circonferenza goniometrica. Se $Y_P \neq 0$ (cioè se $P \neq A$ e $P \neq C$), si chiama cotangente di α (cotg α oppure cotan α) la quantità $\frac{X_P}{Y_P} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Notiamo che, se P è diverso da A, B, C, D, cioè se $X_P \neq 0$ ed $Y_P \neq 0$, cioè se esistono sia la tangente che la cotangente, si ha:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{X_P}{Y_P} = \frac{1}{\frac{Y_P}{X_P}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\ ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{Y_P}{X_P} = \frac{1}{\frac{X_P}{Y_P}} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}$$

Quindi la tangente e la cotangente, se esistono entrambe, sono una la RECIPROCA dell'altra. Proviamo che cotg α è uguale alla lunghezza del segmento $\boxed{BT}$ in figura, ove T si ottiene prolungando la semiretta OP dalla parte di P e facendo l'intersezione di questa semiretta con la retta Y=1, cioè con la retta tangente alla circonferenza goniometrica nel punto B=(0,1). Infatti, consideriamo i triangoli OSP e OBT: questi due triangoli, per costruzione, hanno uguali gli angoli $S\hat{O}P$ e $B\hat{O}T$, e inoltre anche gli angoli $O\hat{S}P$ e $O\hat{B}T$ sono uguali, perché sono retti. Allora i due triangoli hanno due angoli uguali e, procedendo analogamente come quando abbiamo visto la funzione tangente, tutti i tre angoli saranno uguali, quindi i due triangoli sono SIMILI, e quindi hanno le lunghezze dei rispettivi lati IN PROPORZIONE. In particolare, $BT = \frac{BT}{1} = \frac{BT}{OB} = \frac{SP}{OS}$ (perché i triangoli OBT e OSP sono simili) $= \frac{X_P}{Y_P} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotan}\alpha$, come volevamo dimostrare.

ESEMPI E PROPRIETÀ IN TRIGONOMETRIA



Ricordiamo che l'angolo α $\alpha = A\hat{O}P$ corrisponde in modo "naturale" alla lunghezza α dell'arco di circonferenza $\widehat{AP}$ che va dal punto A al punto P in senso antiorario.

La lunghezza della circonferenza di raggio R è $2\pi R$, quindi la lunghezza della circonferenza goniometrica è 2π (perché il raggio è 1), quindi l'angolo "giro" $A\hat{O}A$ (dove si fa il giro di tutta la circonferenza) è 2π (comunemente noto come 360°). Se si prende l'"angolo degenere" $A\hat{O}A$ "restando fermi", si ottiene che da A ad A (stesso punto) rimanendo fermi è equivalente a come fare un arco di lunghezza 0 (cosa che corrisponde a 0 gradi). Se si prende l'arco di circonferenza $\widehat{AB}$ in senso antiorario, otteniamo l'angolo retto (90°) che corrisponde a $\frac{\pi}{2}$ $\left(=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\right.$, perché è $\frac{1}{4}$ di circonferenza). Prendendo l'arco $\widehat{AC}$ in senso antiorario, otteniamo metà circonferenza, cioè $\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \boxed{\pi}$, che corrisponde all'angolo piatto (180°). Prendendo l'arco $\widehat{AD}$ in senso antiorario (quello che passa per i punti B e C) abbiamo $\frac{3}{4}$ di circonferenza, quindi $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$, che corrisponde a 270°. Prendendo $\widehat{AD}$ in senso ORARIO, abbiamo $\frac{1}{4}$ di circonferenza, ma in senso <u>negativo</u> (perché il verso positivo è quello ANTIORARIO, cioè quello della rotazione terrestre), quindi $-\frac{1}{4}\cdot 2\pi = -\frac{\pi}{2}$, che corrisponde a $-90°$, cioè all'angolo retto con verso negativo. Quindi abbiamo la tabella

$0°$	0
$90°$	$\pi/2$
$180°$	π
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$
$360°$	2π
$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$

Le misurazioni $0°, 90°, \dots$ sono le misurazioni in <u>GRADI</u>, mentre quelle $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$ sono in <u>RADIANTI</u>. Quindi: A $180°$ corrispondono π radianti. A $360°$ corrispondono 2π radianti (perché la circonferenza goniometrica ha raggio 1; in generale è $2\pi R$, 2π per il raggio). Quindi se a 2π radianti corrisponde 2π per il raggio, allora a un radiante corrisponde il raggio (nel nostro caso il raggio è 1), quindi l'angolo α di <u>un radiante</u> corrisponde al punto P tale che la lunghezza dell'arco $\widehat{AP}$ sia uguale a 1. Ma a quanti gradi sarà equivalente un radiante? Abbiamo detto che 180 gradi $= \pi$ radianti, quindi

$\frac{180}{\pi}\cdot$ [numero di] gradi $= 1$ radiante, pertanto

$$1 \text{ radiante} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \simeq \text{circa } 57°$$

Inoltre, se consideriamo la misura in gradi e la misura in radianti di un angolo, dire "180 gradi $= \pi$ radianti" equivale a formulare la proporzione

$$\frac{180}{\text{misura in gradi}} = \frac{\pi}{\text{misura in radianti}}, \text{ pertanto}$$

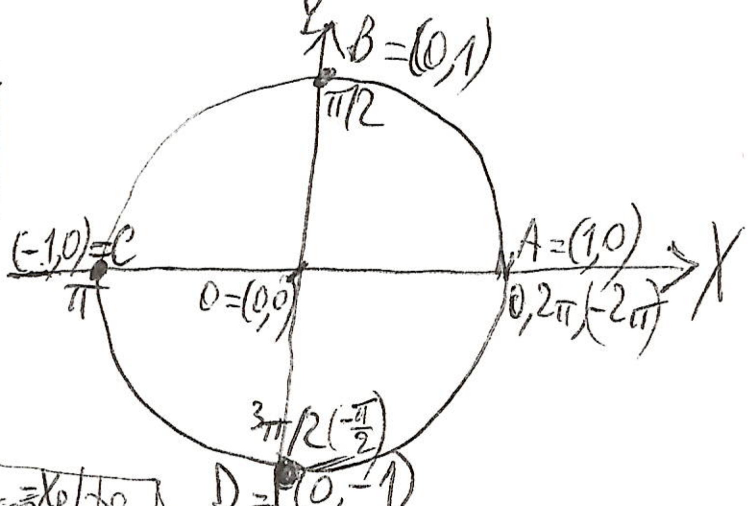
$$\text{misura in radianti} = \frac{\pi}{180}\cdot \text{misura in gradi};$$

$$\text{misura in gradi} = \frac{180}{\pi}\text{ misura in radianti.}$$

Per esempio: a 30° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 30$ radianti, cioè $\frac{\pi}{6}$ radianti; a 45° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 45$ radianti, cioè $\frac{\pi}{4}$ radianti; a 60° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ radianti; a 120° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 120$ radianti, ossia $\frac{2}{3}\pi$ radianti; per 135° si ha $\frac{\pi}{180}\cdot 135 =$ $= \frac{\pi\cdot\cancel{15}\cdot 9}{\cancel{3\cdot 5}\cdot 12} = \frac{3}{4}\pi$ radianti; a 150° corrispondono $\frac{\pi}{180}\cdot 150 = \frac{5}{6}\pi$ radianti, e così via. Si ha la tabella

30°	π/6
45°	π/4
60°	π/3
120°	2π/3
135°	3π/4
150°	5π/6

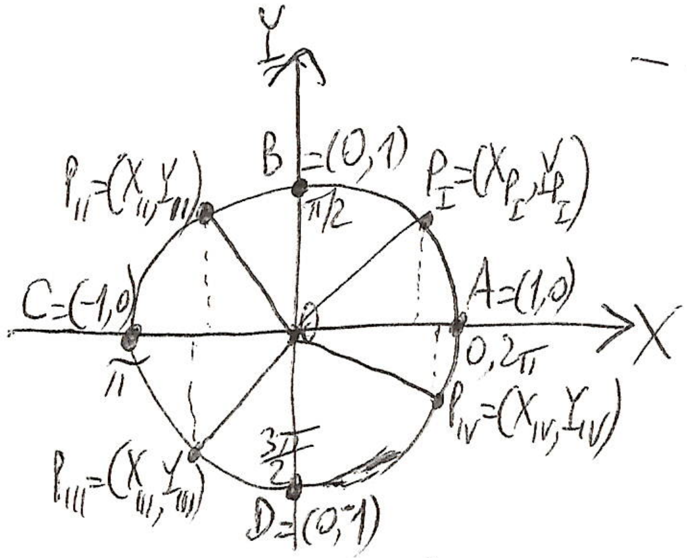
0°	0
90°	π/2
180°	π
270°	3π/2
360°	2π
-90	-π/2



Arco	Gradi	Radianti	$\sin = Y_P$	$\cos = X_P$	tg	cotg
$\widehat{AA}$ stando fermi	0°	0	0	1	0	non esiste
$\widehat{AB}$ antiorario	90°	π/2	1	0	non esiste	0
$\widehat{AC}$ antiorario	180°	π	0	-1	0	non esiste
$\widehat{AD}$ antiorario	270°	3π/2	-1	0	non esiste	0
$\widehat{AA}$ antiorario (1 giro)	360°	2π	0	1	0	non esiste
$\widehat{AA}$ 1 giro orario	-360°	-2π	0	1	0	non esiste

Abbiamo trovato i valori del seno e coseno semplicemente "leggendo" le coordinate $X_A, Y_A, X_B, Y_B, X_C, Y_C, X_D, Y_D$" e della tangente e cotangente con le formule $\frac{Y_P}{X_P}$ e $\frac{X_P}{Y_P}$ (il "non esiste" deriva dal fatto che NON SI PUÒ DIVIDERE PER ZERO)

E SENZA IMPARARE MENTE A MEMORIA!!!



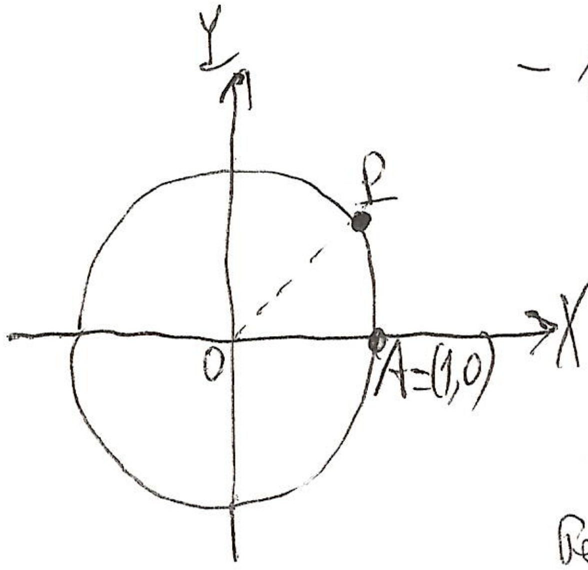
Sempre "leggendo" le coordinate X_p, Y_p e pensando (X_p = coseno, Y_p = seno) si ricava la seguente TABELLA del SEGNO delle funzioni seno, coseno, tangente e cotangente

(estremi esclusi...)		sin	cos	tg	cotg
Da 0 a π/2	I Quadrante	+	+	+	+
Da π/2 a π	II Quadrante	+	—	—	—
Da π a $\frac{3}{2}\pi$	III Quadrante	—	—	+	+
Da $\frac{3}{2}\pi$ a 2π	IV Quadrante	—	+	—	—

Inoltre, sempre graficamente dalla circonferenza goniometrica, si vede che, per ogni punto P della circonferenza goniometrica, i valori X_p e Y_p sono sempre compresi fra −1 e 1 (estremi inclusi, perché — come abbiamo visto — ci sono casi in cui il seno vale −1, oppure 1, come pure per il coseno). Otteniamo quindi, per ogni angolo α:

$$\boxed{-1 \leq \sin \alpha \leq 1}$$

$$\boxed{-1 \leq \cos \alpha \leq 1}$$



Adesso notiamo che si possono considerare anche "angoli" più grandi di 2π, o "angoli negativi" più piccoli di -2π. Naturalmente si deve considerare la corrispondente lunghezza d'arco. Per esempio, sia $\alpha = \frac{9}{4}\pi$. Notiamo che $\frac{9}{4}\pi$ è <u>più grande</u> di $2\pi = \frac{8}{4}\pi$. Allora alla lunghezza $\alpha = \frac{9}{4}\pi$ quale punto P della circonferenza goniometrica sarà associato? Osserviamo che $\frac{9}{4}\pi$ si scrive anche come: $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{4}$. Quindi, sulla circonferenza goniometrica, dapprima facciamo un giro di 2π in senso antiorario, e poi facciamo un arco di circonferenza di $\frac{\pi}{4}$, ottenendo lo stesso punto P che avremmo raggiunto se avessimo considerato un arco di lunghezza $\frac{\pi}{4}$.

Quindi, se a un "angolo" (= "arco di circonferenza di lunghezza") α aggiungiamo 2π, o 4π, o 6π, oppure $2k\pi$, dove k è un intero positivo, otteniamo <u>lo stesso punto</u> P che avremmo raggiunto considerando semplicemente α, facendo però 1 giro (in più) in senso antiorario nel caso 2π, 2 giri (in più) in senso antiorario nel caso 4π, ..., k giri (in più) in senso antiorario nel caso $2k\pi$. Se invece ad α si "aggiunge" -2π, o -4π, oppure $-2k\pi$, dove k è un intero positivo, otteniamo lo <u>stesso</u> punto P dove saremmo arrivati considerando α, facendo però 1 giro (in più) in senso ORARIO nel caso -2π, 2 giri (in più) in senso ORARIO nel caso -4π, ..., k giri (in più) in senso ORARIO nel caso $-2k\pi$.

Notiamo che, quando si gira in senso orario, si deve considerare sempre il verso negativo. Siccome si ottiene lo stesso punto P, allora si ottengono gli stessi valori di seno, coseno, tangente e cotangente, ottenendo per ogni angolo α e per ogni $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ (ove $\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi relativi)

$$\boxed{\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha}; \quad \boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha}$$

Ricordiamo che le funzioni tangente e cotangente godono delle seguenti proprietà: per ogni angolo α e per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$\boxed{tg(\alpha + k\pi) = tg\,\alpha}; \quad \boxed{cotg(\alpha + k\pi) = cotg\,\alpha}$$ (dove ha senso)

Ora richiamiamo le seguenti formule la cui dimostrazione è stata fatta nel Precorso/Parte 1 del Corso.

- IDENTITÀ FONDAMENTALE $\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ per ogni angolo α
- FORMULE SU CUI POGGIA LA TRIGONOMETRIA (cioè FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEL SENO E DEL COSENO): per ogni coppia di angoli α, β:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

Altre relazioni importanti - Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ (il coseno è una funzione pari); $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; (dove ha senso) $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$, $cotg(-\alpha) = -cotg\,\alpha$; (seno, tangente e cotangente sono funzioni dispari); $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$; $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$; $\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha$; $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$; $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$;
$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$;
$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Adesso riportiamo le tabelle dei principali valori delle funzioni trigonometriche

TABELLA DEI VALORI TRIGONOMETRICI

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$0°$	0	0	1	0	non esiste
$15°$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$
$18°$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac12$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$
$36°$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$	$\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$	1	1
$54°$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac12$	$\sqrt3$	$\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$
$72°$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$
$75°$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac14(\sqrt6-\sqrt2)$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste	0
$105°$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-(2+\sqrt3)$	$-(2-\sqrt3)$
$108°$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac12$	$-\sqrt3$	$-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$
$126°$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}$	-1	-1
$144°$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac12$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$	$-\sqrt3$
$162°$	$\frac{9\pi}{10}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$
$165°$	$\frac{11\pi}{12}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-(2-\sqrt3)$	$-(2+\sqrt3)$
$180°$	π	0	-1	0	non esiste
Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
$180°$	π	0	-1	0	non esiste
$195°$	$\frac{13}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$
$198°$	$\frac{11}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$
$210°$	$\frac76\pi$	$-\frac12$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$
$216°$	$\frac65\pi$	$-\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$
$225°$	$\frac54\pi$	$-\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}$	1	1
$234°$	$\frac{13\pi}{10}$	$-\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$
$240°$	$\frac43\pi$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac12$	$\sqrt3$	$\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\sqrt3}{3}$
$252°$	$\frac{7\pi}{5}$	$-\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$
$255°$	$\frac{17}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-\frac14(\sqrt6-\sqrt2)$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	non esiste	0
$285°$	$\frac{19}{12}\pi$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-(2+\sqrt3)$	$-(2-\sqrt3)$
$288°$	$\frac85\pi$	$-\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$
$300°$	$\frac53\pi$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac12$	$-\sqrt3$	$-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$
$306°$	$\frac{17}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$
$315°$	$\frac74\pi$	$-\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{1}{\sqrt2}$	$\frac{\sqrt2}{2}=\frac{1}{\sqrt2}$	-1	-1
$324°$	$\frac95\pi$	$-\frac14\sqrt{10-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25+10\sqrt5}$
$330°$	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac12$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt3}=-\frac{\sqrt3}{3}$	$-\sqrt3$
$342°$	$\frac{19}{10}\pi$	$-\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}$	$-\frac15\sqrt{25-10\sqrt5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$
$345°$	$\frac{23}{12}\pi$	$-\frac14(\sqrt6-\sqrt2)$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-(2-\sqrt3)$	$-(2+\sqrt3)$
$360°$	2π	0	1	0	non esiste

-147-

A. Quadro dei valori delle funzioni goniometriche di archi particolari

N.B.: ±∞ : in realtà non esiste quel valore ...

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
0°	0	0	1	0	±∞	1	±∞
9°	$\frac{1}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}{\sqrt5-1}$	$\frac{\sqrt5-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}$	$\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}$
15°	$\frac{1}{12}\pi$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$	$\sqrt6-\sqrt2$	$\sqrt6+\sqrt2$
18°	$\frac{1}{10}\pi$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{5}}$	$\sqrt5+1$
22°30′	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2-1$	$\sqrt2+1$	$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$	$\frac{2\sqrt3}{3}$	2
36°	$\frac{1}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt5-1$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	1	1	$\sqrt2$	$\sqrt2$
54°	$\frac{3}{10}\pi$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$	$\sqrt5-1$
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt3$	$\frac{\sqrt3}{3}$	2	$\frac{2\sqrt3}{3}$
67° 30′	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2+1$	$\sqrt2-1$	$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$
72°	$\frac{2}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt5+1$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$
75°	$\frac{5}{12}\pi$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$	$\sqrt6+\sqrt2$	$\sqrt6-\sqrt2$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	±∞	0	±∞	1
99°	$\frac{11}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}}{4}$	$\frac{1-\sqrt5}{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}-4}{\sqrt5-1}$	$\frac{4}{\sqrt{5-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}}$	$\frac{4}{\sqrt{3-\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}$
105°	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$	$-2-\sqrt3$	$-2+\sqrt3$	$-\sqrt6-\sqrt2$	$\sqrt6-\sqrt2$
108°	$\frac{3}{5}\pi$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{1-\sqrt5}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$-1-\sqrt5$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$
111° 30′	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$-\sqrt2-1$	$1-\sqrt2$	$\frac{-2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt3$	$-\frac{\sqrt3}{3}$	−2	$\frac{2\sqrt3}{3}$
126°	$\frac{7}{10}\pi$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$	$\sqrt5-1$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	−1	−1	$-\sqrt2$	$\sqrt2$
144°	$\frac{4}{5}\pi$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt5}{4}}$	$\frac{-\sqrt5-1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$1-\sqrt5$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{3}$	$-\sqrt3$	$-\frac{2\sqrt3}{3}$	2
157°30′	$\frac{7}{8}\pi$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$1-\sqrt2$	$-1-\sqrt2$	$-\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$
162°	$\frac{9}{10}\pi$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$\sqrt5+1$
165°	$\frac{11}{12}\pi$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{-\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-2+\sqrt3$	$-2-\sqrt3$	$-\sqrt6+\sqrt2$	$\sqrt6+\sqrt2$
180°	π	0	−1	0	∓∞	−1	±∞

Gradi	Radianti	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	Secante	Cosecante
189°	$\frac{21}{20}\pi$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}}{4}$	$\frac{-\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}{\sqrt5-1}$	$\frac{\sqrt5-1}{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}$	$\frac{4}{\sqrt{5-\sqrt5}-\sqrt{3+\sqrt5}}$
195°	$\frac{13}{12}\pi$	$\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$	$\frac{-\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$2-\sqrt3$	$2+\sqrt3$	$\sqrt2-\sqrt6$	$-\sqrt6-\sqrt2$
198°	$\frac{11}{10}\pi$	$\frac{1-\sqrt5}{4}$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$-1-\sqrt5$
202°30′	$\frac{9}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2-1$	$\sqrt2-1$	$-\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt3}{3}$	$\sqrt3$	$-\frac{2\sqrt3}{3}$	-2
216°	$\frac{6}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{-\sqrt5-1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$1-\sqrt5$	$-\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	1	1	$-\sqrt2$	$-\sqrt2$
234°	$\frac{13}{10}\pi$	$\frac{-\sqrt5-1}{4}$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$	$1-\sqrt5$
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt3$	$\frac{\sqrt3}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt3}{3}$
247°30′	$\frac{11}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\sqrt2+1$	$\sqrt2-1$	$-\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$
252°	$\frac{7}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{1-\sqrt5}{4}$	$\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$-1-\sqrt5$	$-\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$
255°	$\frac{17}{12}\pi$	$\frac{-\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$	$2+\sqrt3$	$2-\sqrt3$	$-\sqrt6-\sqrt2$	$\sqrt2-\sqrt6$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	-1
279°	$\frac{31}{20}\pi$	$\frac{-\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}{4}$	$\frac{1-\sqrt5}{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt5}}{1-\sqrt5}$	$\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt5}-\sqrt{5-\sqrt5}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3+\sqrt5}+\sqrt{5-\sqrt5}}$
285°	$\frac{19}{12}\pi$	$\frac{-\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-2-\sqrt3$	$\sqrt3-2$	$\sqrt6+\sqrt2$	$\sqrt2-\sqrt6$
288°	$\frac{8}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5-1}{4}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt5+1$	$-\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$
292°30′	$\frac{13}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$-\sqrt2-1$	$1-\sqrt2$	$\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt3$	$-\frac{\sqrt3}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt3}{3}$
306°	$\frac{17}{10}\pi$	$\frac{-\sqrt5-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$	$1-\sqrt5$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	-1	-1	$\sqrt2$	$-\sqrt2$
324°	$\frac{9}{5}\pi$	$-\frac{\sqrt{10-2\sqrt5}}{4}$	$\frac{\sqrt5+1}{4}$	$-\sqrt{5-2\sqrt5}$	$-\frac{\sqrt{25+10\sqrt5}}{5}$	$\sqrt5-1$	$-\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt5}}$
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{3}$	$-\sqrt3$	$\frac{2\sqrt3}{3}$	-2
337°30′	$\frac{15}{8}\pi$	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt2}}{2}$	$1-\sqrt2$	$-\sqrt2-1$	$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt2}}$	$-\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt2}}$
342°	$\frac{19}{10}\pi$	$\frac{1-\sqrt5}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt5}}{4}$	$-\frac{\sqrt{25-10\sqrt5}}{5}$	$-\sqrt{5+2\sqrt5}$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt5}}$	$-1-\sqrt5$
345°	$\frac{23}{12}\pi$	$\frac{\sqrt2-\sqrt6}{4}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\sqrt3-2$	$-\sqrt3-2$	$\sqrt6-\sqrt2$	$-\sqrt6-\sqrt2$
360°	2π	0	1	0	$\mp\infty$	1	$\mp\infty$

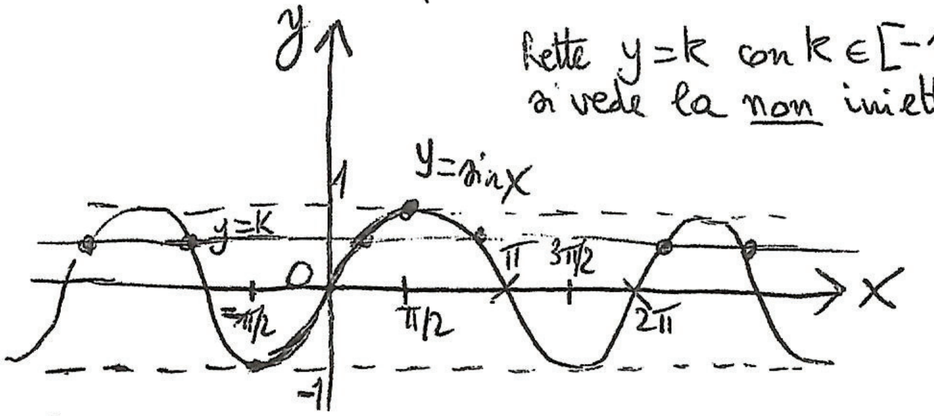
PROPRIETÀ QUALITATIVE DELLE FUNZIONI SENO, COSENO, TANGENTE E COTANGENTE E LORO FUNZIONI INVERSE

Per ora, i grafici li tracciamo "a livello di idee". Dopo, li ricaveremo come "studi di funzione"!

Si sa che seno, coseno, tangente e cotangente sono funzioni periodiche (seno e coseno di periodo 2π, tangente e cotangente di periodo π), quindi sono funzioni NON INIETTIVE. Per esempio, la periodicità del seno si esprime come: per ogni $x \in \mathbb{R}$,

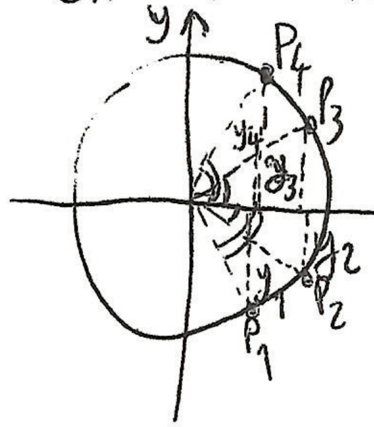
$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$$

e quindi ci sono infiniti valori di x che hanno la stessa immagine y, nel nostro caso $y = \sin x$, $y = \sin(x + 2k\pi)$ .... Quindi la funzione seno è NON INIETTIVA, ed ogni funzione periodica è non iniettiva.



Cerchiamo allora un intervallo in cui la funzione seno sia strettamente crescente oppure strettamente decrescente: ciò implica che, in quell'intervallo, la funzione seno sarà iniettiva. Dalla figura si vede che un intervallo "buono" è $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

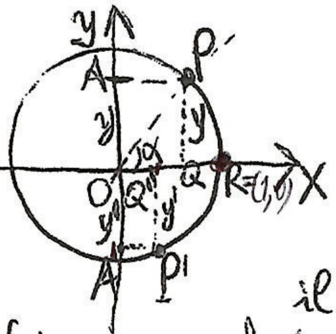
Ma come si fa a vedere più intuitivamente (senza darlo "per buono" dal grafico) che la funzione seno è <u>strettamente crescente</u> in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$? GUARDANDO LA CIRCONFERENZA GONIOMETRICA! Ricordiamo che, sulla circonferenza goniometrica, visto che il suo raggio è 1, il seno si identifica con la coordinata y, mentre il coseno si identifica con la coordinata x.



$) = \alpha_3$
$)) = \alpha_4$
$) = \alpha_2$
$\gg = \alpha_1$

Si vede geometricamente, dalla figura, che il seno è una funzione strettamente crescente ~~da~~ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nella figura, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 sono 4 angoli tali che $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \frac{\pi}{2}$, e per le corrispondenti coordinate y, si ha $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ (perché y_1 ed y_2 sono <u>negative</u> e vanno prese con il loro segno).

Quindi la funzione seno è INIETTIVA in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



Per la suriettività, vediamo qual è il codominio della funzione seno. Innanzi tutto si vede geometricamente che, sulla circonferenza goniometrica, y varia tra -1 ed 1, quindi il codominio della funzione seno è contenuto in $[-1, 1]$. Vediamo ora che è <u>UGUALE</u> a $[-1,1]$. Sia y un <u>qualsiasi</u> numero $y \in [-1, 1]$ e vediamo che esiste un angolo $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale che $\sin\alpha = y$. Nella figura, congiungiamo la parallela all'asse x a partire dal punto A, che incontra la parte <u>DESTRA</u> della circonferenza goniometrica nel punto P. L'angolo $P\hat{O}R = \alpha$ sarà l'angolo richiesto ($\sin\alpha = y$). Lo stesso ragionamento si fa con y negativo a partire dal punto P'.

Quindi il codominio della funzione seno è $[-1,1]$
Quindi $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ è suriettiva (a destra di $\to$ si mette il CODOMINIO); è anche iniettiva, e quindi è BIIETTIVA. Allora esiste la funzione inversa ARCOSENO, che si indica con $\sin^{-1}$ oppure $\arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (il dominio e il codominio sono scambiati!)
Questa funzione è strettamente crescente, perché la funzione di partenza è strettamente crescente.

Si ha:

$\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ — $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (vedi tabelle)

$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ — $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ perché $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ — $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$ — $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

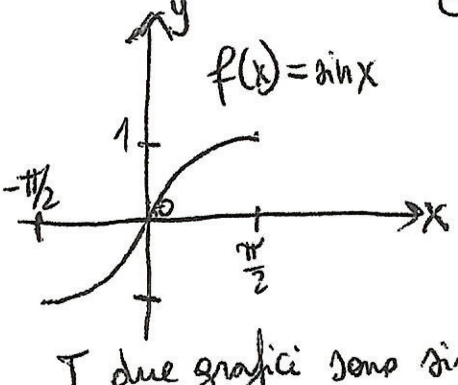
$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ — $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

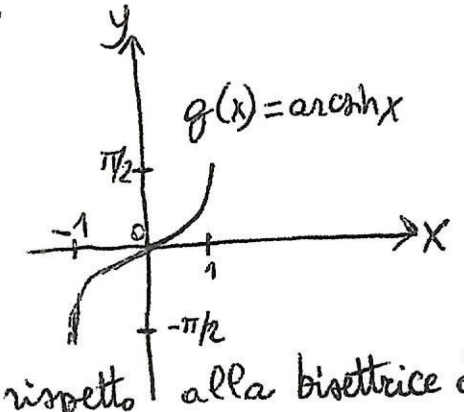
$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ — $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ — $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arcsin 0 = 0$ — $\sin 0 = 0$

GRAFICI

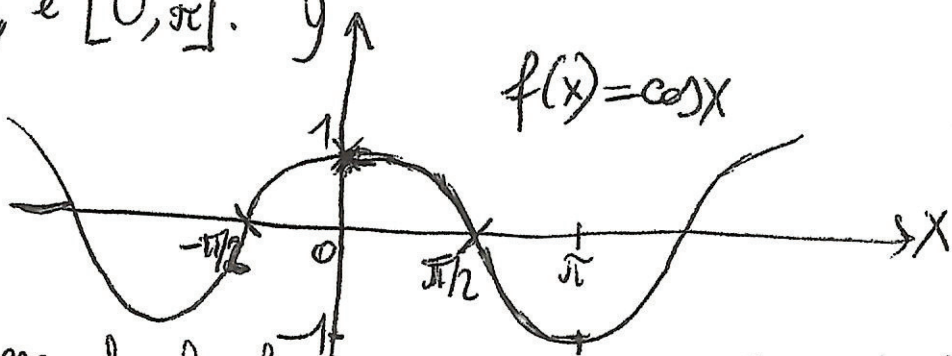




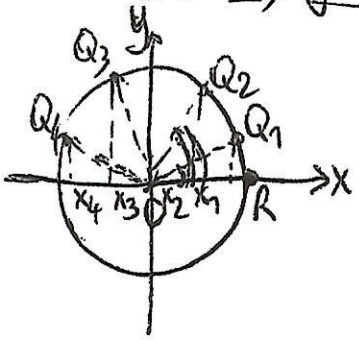
I due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del I e del III Quadrante $y=x$ (come per tutte le funzioni inverse)

IMPORTANTE: N.B.: Il grafico del seno, qui, viene dato per buono. Ma in seguito lo dimostriamo, perché sarà fatto lo studio della funzione $f(x) = \sin x$.

Anche la funzione coseno, visto che è periodica di periodo 2π, è NON INIETTIVA. Dove e come farla "diventare" iniettiva? (...e suriettiva...). Cercheremo un intervallo in cui la funzione coseno sia strettamente crescente o strettamente decrescente: ciò implica che, in quell'intervallo, la funzione coseno sarà iniettiva. Dalla figura si vede che un intervallo "buono" è $[0,\pi]$.



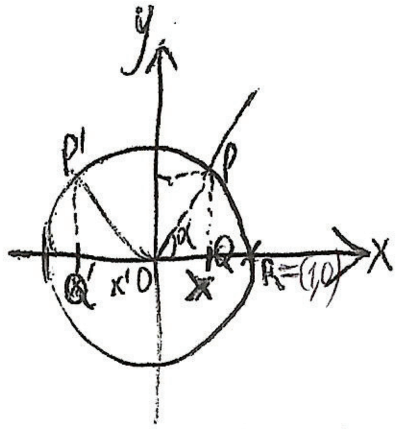
Per vedere che la funzione coseno è strettamente decrescente in $[0,\pi]$, guardiamo la circonferenza goniometrica. Su questa



$) = \alpha_1 = R\hat{O}Q_1$
$)) = \alpha_2 = R\hat{O}Q_2$
$R\hat{O}Q_3 = \alpha_3$
$R\hat{O}Q_4 = \alpha_4$

circonferenza, visto che il raggio è 1, il coseno si identifica con la coordinata x. Nella figura si ha $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4<\pi$ (ma le nostre considerazioni vanno bene anche se $\alpha_1=0$ e/o $\alpha_4=\pi$). Le corrispondenti coordinate x hanno la proprietà che $x_1>x_2>x_3>x_4$ (notiamo che x_1 e x_2 si prendono con il segno positivo, ma x_3 ed x_4 si prendono con il segno NEGATIVO). Quindi la funzione coseno è strettamente decrescente (e quindi anche iniettiva) in $[0,\pi]$. Per quanto riguarda la suriettività, vediamo qual è il codominio della funzione coseno. Innanzi tutto si vede geometricamente che, sulla circonferenza goniometrica, ~~x~~ varia tra -1 ed 1, quindi il codominio della funzione coseno è contenuto in $[-1,1]$.

Vediamo ora che il codominio della funzione coseno è <u>esattamente</u> $[-1,1]$. Consideriamo un qualunque numero reale $x \in [-1,1]$ (nella figura, prendiamo quello positivo).



A partire dal punto Q, tracciamo la parallela all'asse delle y, che incontrerà la parte SUPERIORE della circonferenza goniometrica nel punto P. L'angolo $R\hat{O}P$ sarà quell'angolo α compreso tra 0 e π tale che $\cos\alpha = x = OQ$. Lo stesso ragionamento si fa con x' negativo a partire dal punto Q', ottenendo l'angolo ottuso $R\hat{O}P'$, il cui coseno è la lunghezza del segmento OQ' con il segno $-$.

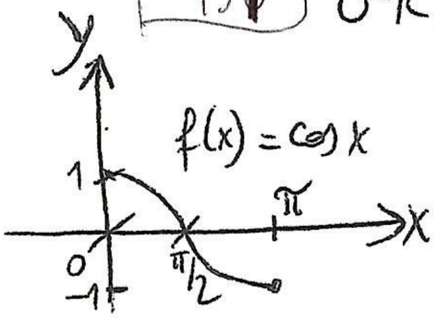
Pertanto il codominio della funzione coseno è $[-1,1]$.

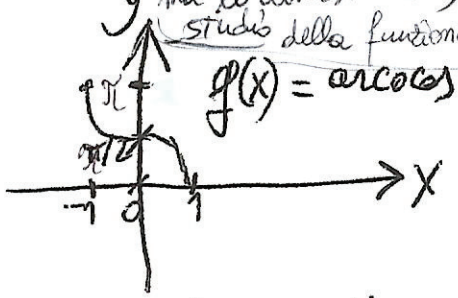
Quindi $\cos: [0,\pi] \to [-1,1]$ è <u>suriettiva</u> (perché a destra di $\to$ abbiamo messo il CODOMINIO); è anche <u>iniettiva</u>, e pertanto è BIIETTIVA. Allora esiste la funzione inversa ARCOCOSENO, che si indica con $\cos^{-1}$ oppure $\text{arcocos}: [-1,1] \to [0,\pi]$ (il dominio e il codominio sono scambiati). La funzione arcocoseno è <u>strettamente</u> <u>DECRESCENTE</u>, perché la funzione di partenza è strettamente <u>decrescente</u>.

Si ha: $\text{arcocos}\, 1 = 0$, perché $\cos 0 = 1$; $\text{arcocos}(-1) = \pi$, perché $\cos\pi = 1$; $\text{arcocos}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, perché $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{arcocos}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$, perché $\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{arcocos}\, 0 = \frac{\pi}{2}$, perché $\cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\text{arcocos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, perché $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\text{arcocos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$, perché $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$; $\text{arcocos}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, perché $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{arcocos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi$, perché $\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

GRAFICI

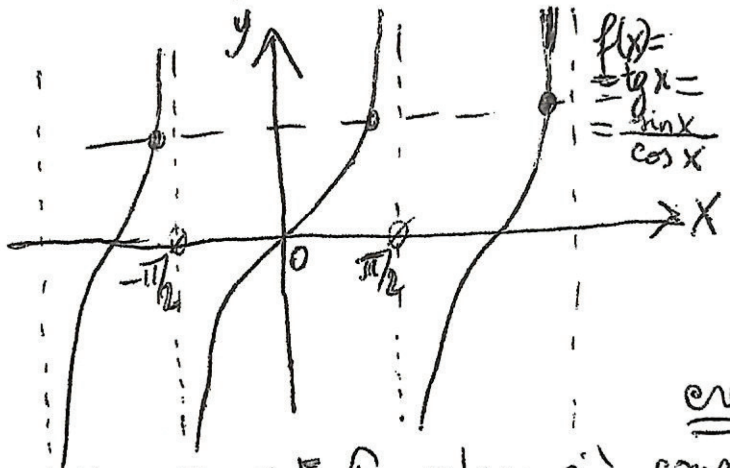
N.B.: Il grafico del coseno ora è dato per buono, ma lo dimostreremo, facendo lo studio della funzione coseno.



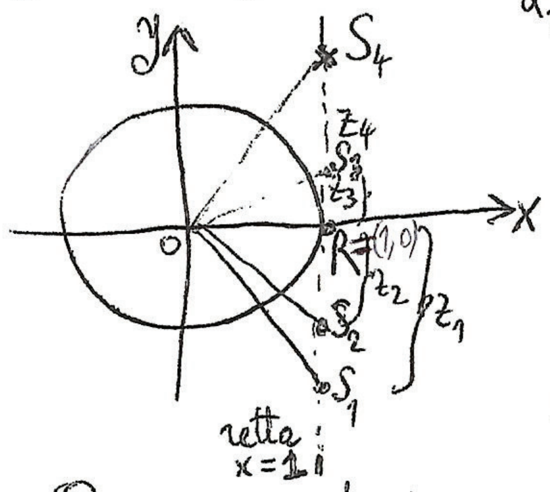


I due grafici sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° Quadrante $y=x$ (perché siamo in presenza di due funzioni l'una l'inversa dell'altra)

Adesso consideriamo la funzione <u>TANGENTE</u>, funzione periodica di periodo π e <u>NON DEFINITA</u> nei punti del tipo $\frac{\pi}{2}+k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ..\}$



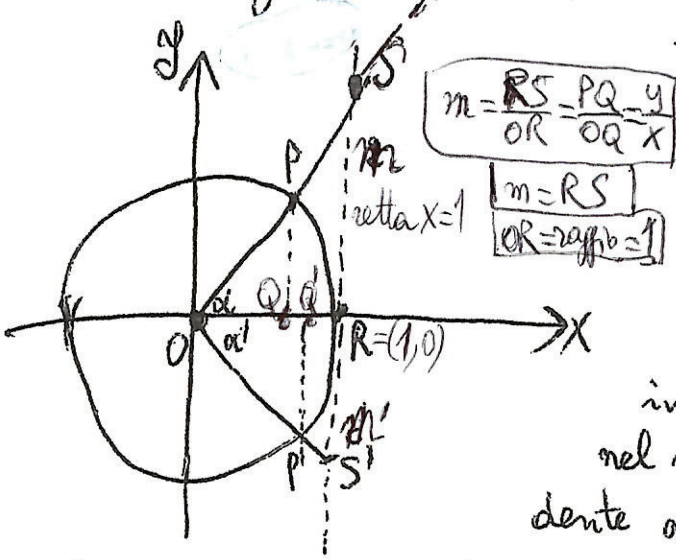
Cerchiamo ora un intervallo dove la funzione tangente è iniettiva (o meglio, <u>strettamente crescente</u>). Un intervallo "buono" è $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Per vedere ciò, consideriamo 4 angoli $\alpha_1 = R\hat{O}S_1$, $\alpha_2 = R\hat{O}S_2$, $\alpha_3 = R\hat{O}S_3$, $\alpha_4 = R\hat{O}S_4$



si ha: $-\frac{\pi}{2} < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \frac{\pi}{2}$ e, in corrispondenza, $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$ (notiamo che z_1 e z_2 sono negativi mentre z_3 e z_4 sono positivi). Quindi la funzione tangente è <u>strettamente crescente</u> (e quindi anche <u>iniettiva</u>) in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

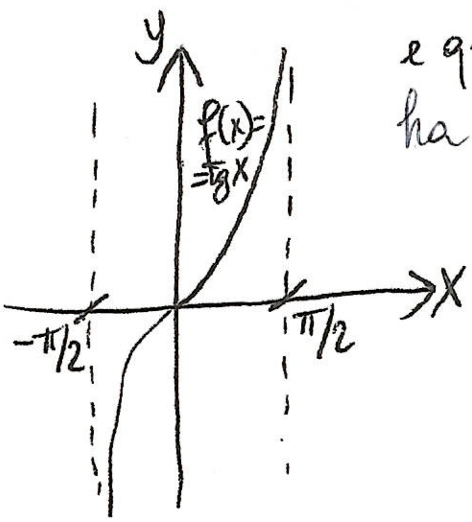
Ora consideriamo la funzione tangente tg (oppure tan) ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, dove ha senso)

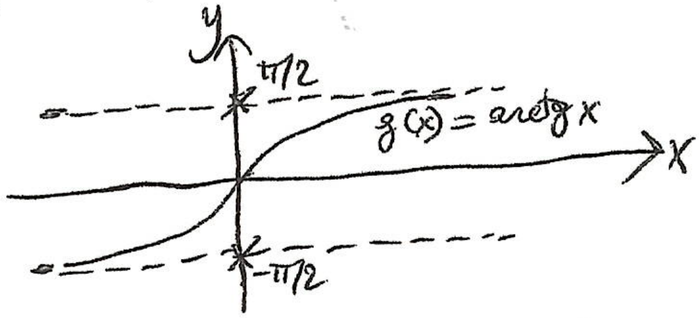
$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$, e facciamo vedere che è <u>suriettiva</u>, cioè che il suo codominio è tutto $\mathbb{R}$, cioè (graficamente, con la circonferenza goniometrica)



Sia m un qualsiasi numero reale. (nella figura, m è positivo.) Sulla retta $x=1$ tracciamo il segmento RS di lunghezza m. La retta congiungente S con O (l'origine degli assi cartesiani) ha equazione $\boxed{y = mx}$ incontrerà la circonferenza goniometrica nel punto P. L'angolo $\alpha = R\hat{O}P$, corrispondente all'arco orientato $\overset{\frown}{RP}$ che va da R a P, è propio l'angolo (compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, estremi esclusi) tale che $tg\,\alpha = m$, propio per la "costruzione - visualizzazione geometrica" della tangente goniometrica. Alla stessa conclusione si giunge se si prende un numero reale m' negativo oppure lo 0 (per esempio, nella figura, si troverà l'angolo α' tale che $tg\,\alpha' = m'$). Quindi la funzione tangente $tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ è iniettiva e suriettiva, e quindi è BIIETTIVA. Pertanto esiste la sua funzione inversa <u>ARCOTANGENTE</u>, che si abbrevia con arctg, oppure arctan, oppure $\tan^{-1}$ o tg^{-1}. L'arcotangente è $arctg : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Quindi è definita su tutto $\mathbb{R}$, e il suo codominio è $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ed è biiettiva (come funzione che va da $\mathbb{R}$ a $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$), è strettamente <u>crescente</u> perché la tangente $tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ è strettamente <u>crescente</u>, e la funzione inversa CONSERVA la stretta crescenza

Inoltre $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, e quindi per le proprietà delle funzioni inverse, si ha:





$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$

Naturalmente, i grafici delle due funzioni tangente e arcotangente sono <u>simmetrici</u> rispetto alla <u>bisettrice</u> del 1° e del 3° Quadrante $y = x$, e si ha:

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$

(Queste ultime proprietà derivano direttamente dal concetto di funzione INVERSA). Si ha:

$\operatorname{arctg} 0 = 0$ perché $\operatorname{tg} 0 = 0$

$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ perché $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ perché $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$ perché $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$ perché $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ perché $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

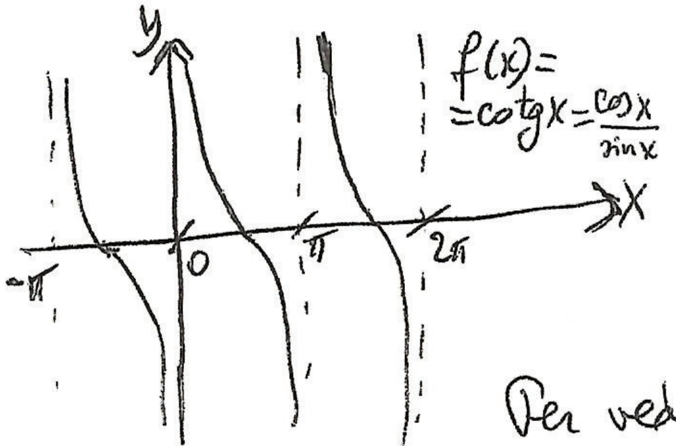
$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ perché $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

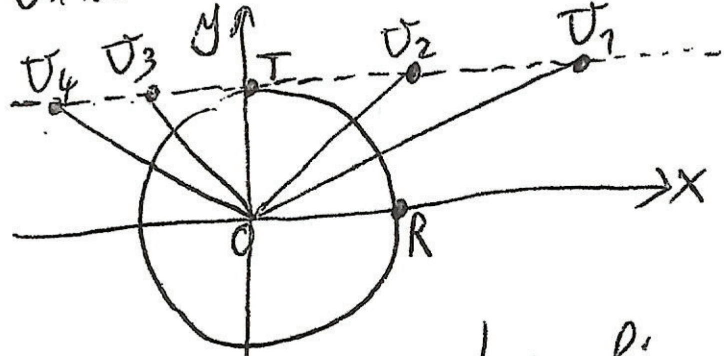
RIPASSARE LA TABELLA DEI VALORI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE!

LA FUNZIONE <u>ARCOTANGENTE</u> È ESTREMAMENTE IMPORTANTE NEL <u>CALCOLO DEGLI INTEGRALI</u> !!!

N.B.: Per ora il grafico della funzione TANGENTE è stato dato per <u>buono</u>, ma in seguito lo <u>dimostriamo</u> facendo lo <u>studio della funzione</u> TANGENTE.

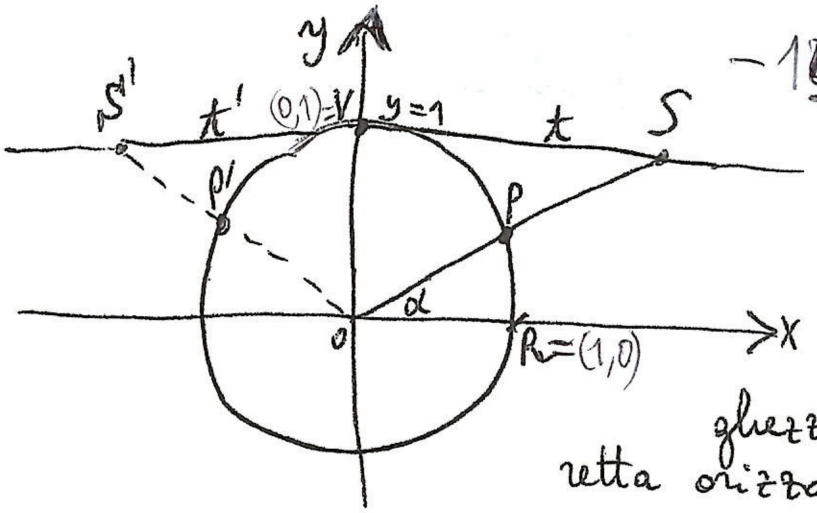
Adesso consideriamo la funzione <u>COTANGENTE</u> ($= \frac{\text{coseno}}{\text{seno}}$)
funzione periodica di periodo π e <u>NON DEFINITA</u>
nei punti del tipo $k\pi$, al variare di $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.
Cerchiamo un intervallo dove la funzione <u>cotangente</u>
è <u>strettamente</u> <u>DECRESCENTE</u> (e quindi anche <u>iniettiva</u>)
Un intervallo "candidato" è $]0, \pi[$.





Per vedere ciò, consideriamo 4 angoli $\alpha_1 = R\hat{O}U_1$, $\alpha_2 = R\hat{O}U_2$, $\alpha_3 = R\hat{O}U_3$, $\alpha_4 = R\hat{O}U_4$, con $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \pi$. Dal significato geometrico della cotangente (vedere la visualizzazione e la costruzione relative nelle primissime cose in cui si parla di trigonometria), si ha che le rispettive cotangenti sono le lunghezze <u>con segno</u> dei segmenti TU_1, TU_2, TU_3, TU_4 (quindi TU_1 e TU_2 sono <u>positivi</u>, mentre TU_3 e TU_4 sono negativi). Quindi si vede geometricamente che la funzione cotangente è strettamente decrescente in $]0, \pi[$, e quindi è iniettiva in $]0, \pi[$.

Mostriamo ora che la funzione $\cot g :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva, cioè che per ogni numero reale t esiste un angolo $\alpha \in]0, \pi[$ tale che $\cot g\, \alpha = t$.

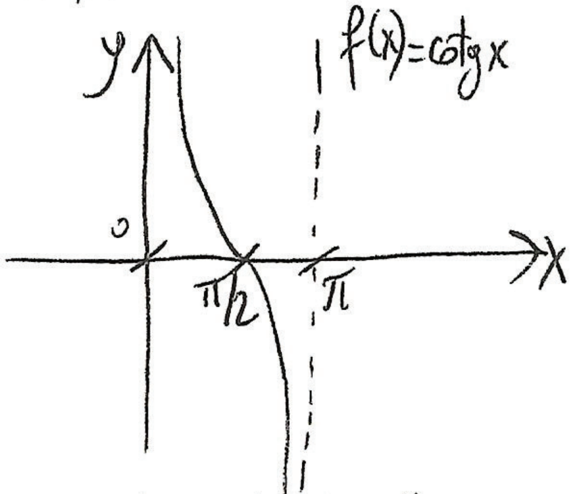


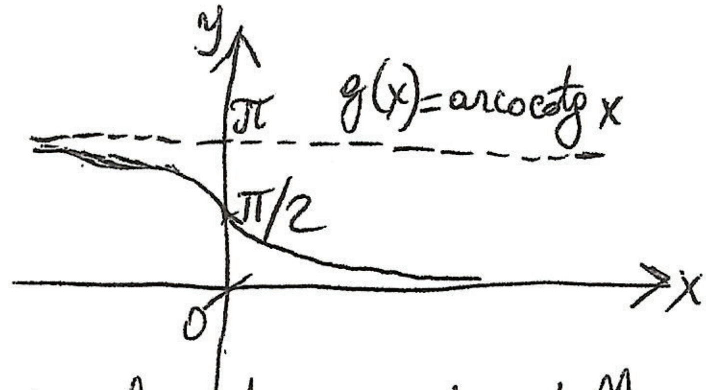
Sia t un numero reale qualsiasi (nella figura viene preso positivo) e sia VS il segmento di lunghezza t che si trova sulla retta orizzontale $y=1$. Congiungiamo il punto S con l'origine O: il segmento OS incontra la circonferenza goniometrica in un punto P. L'angolo $R\hat{O}P$ (che corrisponde all'arco orientato $\overset{\frown}{RP}$ che va da R a P) è quell'angolo α tale che $\text{cotg}\,\alpha = t$. Un ragionamento analogo si può fare con $t'<0$ oppure $t'=0$ (un numero reale qualsiasi negativo, o anche 0, con riferimento alla figura) ottenendo l'angolo ottuso $R\hat{O}S'$, la cui cotangente è t'. Quindi la funzione cotangente assume <u>tutti</u> i valori reali, cioè è <u>suriettiva</u>, ossia il suo codominio è tutto $\mathbb{R}$ (la cotangente è $\text{cotg}:]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$, cioè la sua "restrizione" all'intervallo $]0,\pi[$). Allora $\text{cotg}:]0,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ è <u>BIIETTIVA</u>, e pertanto esiste la sua funzione inversa ARCOCOTANGENTE, che si abbrevia con arcocotg, oppure cotg^{-1}.
L'arcocotangente è $\text{arcocotg}: \mathbb{R} \longrightarrow]0,\pi[$. Il suo campo di definizione è tutto $\mathbb{R}$, il suo codominio è $]0,\pi[$, è <u>biiettiva</u> (come funzione che va da $\mathbb{R}$ a $]0,\pi[$), è STRETTAMENTE <u>DECRESCENTE</u> perché la cotangente $\text{cotg}:]0,\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ è strettamente <u>decrescente</u>,

e la funzione inversa <u>conserva</u> la stretta decrescenza.

Inoltre si ha

$\lim_{x \to 0^+} \cot g\, x = +\infty$, $\lim_{x \to \pi^-} \cot g\, x = -\infty$, e quindi, per le proprietà delle funzioni inverse, si ha $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcocotg} x = \pi$, $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcocotg} x = 0$





Naturalmente, i grafici delle due funzioni cotangente e arcocotangente sono simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e del 3° Quadrante $y = x$, e si ha

per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\cot g(\operatorname{arcocotg} x) = x$

per ogni $x \in \,]0, \pi[$, $\operatorname{arcocotg}(\cot g\, x) = x$

(proprio per le proprietà delle funzioni inverse). Si ha

$\operatorname{arcocotg} 0 = \frac{\pi}{2}$ perché $\cot g \frac{\pi}{2} = 0$

$\operatorname{arcocotg} 1 = \pi/4$ perché $\cot g \frac{\pi}{4} = 1$

$\operatorname{arcocotg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$ perché $\cot g\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1$

$\operatorname{arcocotg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ perché $\cot g \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

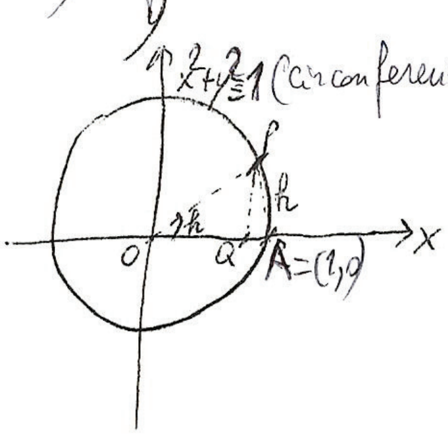
$\operatorname{arcocotg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ perché $\cot g \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(RIPASSARE LA TABELLA DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE!)

N.B.: il grafico della funzione cotangente - qui - è dato per buono. Nel seguito, lo dimostreremo, trattando la funzione cotangente come studio di funzione.

Ora, il prossimo passo è quello di provare il limite notevole

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$



ESERCIZIO

Prima di tutto, dimostriamo che

1) $\lim_{h\to 0^+} \sin h = 0$

2) $\lim_{h\to 0^+} (1-\cos h) = 0$, cioè $\boxed{\lim_{h\to 0^+} \cos h = 1}$

Da considerazioni geometriche si ha, per $h>0$ e molto piccolo:

$0 < \sin h = \overline{QP} < \overline{AP}$ (perché la lunghezza di un cateto è minore di quella dell'ipotenusa) $< \overset{\frown}{AP} = h$ (lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AP}$). Dunque (L'angolo è misurato in radianti!)

$$\boxed{0 < \sin h < h}$$

Ma, se h tende a 0 (dalla destra), allora

$\sin h$ tende a 0, perché è « schiacciato » tra 0 ed h, cioè tra 0 e una quantità che tende a 0, e quindi anche $\sin h$ deve tendere a 0. Pertanto 1) è provato.

Inoltre, $\cos h = \overline{OQ}$, quindi $1-\cos h = \overline{OA} - \overline{OQ} = \overline{QA}$, da cui

$0 < 1-\cos h < \overline{AP}$ (perché la lunghezza di un cateto è minore di quella dell'ipotenusa) $< \overset{\frown}{AP} = h$, e quindi

$$\boxed{0 < 1-\cos h < h}$$

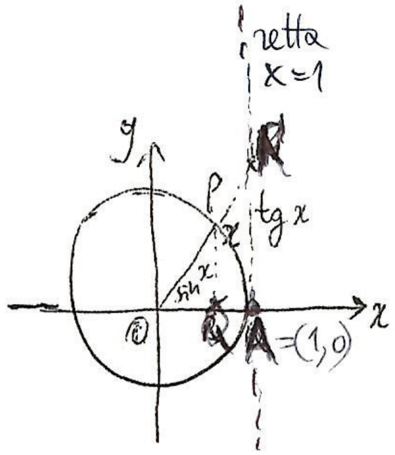
Quando h tende a 0 (dalla destra), allora $1-\cos h$ tende a 0, perché è compreso tra 0 e una quantità che tende a 0. Pertanto anche 2) è dimostrato.

Analogamente si può vedere che $\lim_{h\to 0} \cos h = 1$ e che $\lim_{h\to 0} \sin h = 0$)

Ora vediamo i limiti

LN5) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ (notevole)

LN5') $\boxed{\lim_{x\to \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0}$ ("quasi" notevole)



Vediamo dapprima che $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Disegniamo la circonferenza goniometrica. Da considerazioni geometriche, si ha, per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$\overline{QP} < \widehat{AP} < \overline{AR}$ (ove $\widehat{AP}$ indica l'arco della circonferenza goniometrica che va da A a P), cioè

$\boxed{\sin x < x < \operatorname{tg} x}$ (L'angolo è misurato in radianti!)

Poiché queste quantità sono positive, allora possiamo dividere per $\sin x$, ottenendo $1 = \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} =$
$= \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$. Passando ai reciproci, cambiando il verso delle disuguaglianze, si ottiene $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Ma, siccome $\lim_{x\to 0^+} \cos x = 1$ (vedi pagina precedente), e la quantità $\frac{\sin x}{x}$ è compresa fra due quantità che tendono a 1, allora anche $\frac{\sin x}{x}$ deve tendere a 1.
Pertanto $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Vediamo ora che $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Poniamo $t = -x$. Si ha $x = -t$, e inoltre $t \to 0^+$. Si ottiene:

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} =$ (il seno è una funzione DISPARI)

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$ (in virtù del punto precedente)

Quindi, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (il limite globale esiste se e solo se i limiti destro e sinistro coincidono, ed il loro valore comune è il valore del limite globale), e LN5) è provato.

Vediamo ora LN5'). Si ha: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$; inoltre la funzione seno è limitata, in quanto assume valori compresi fra -1 ed 1.

Pertanto $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x\right) =$

$= 0 \cdot$ funzione limitata $= 0$. (ESERCIZIO) Ora proviamo il seguente

LN6) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$ Si ha: $\boxed{LN6} \xlongequal{(\text{trucco})} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\cdot(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)} =$

$\xlongequal{(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)} \xlongequal{\sin^2 x+\cos^2 x=1} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\underset{\downarrow 1}{\cos x}}}_{1/2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$ (Come si voleva provare) (N.B.: Abbiamo usato $\boxed{\lim_{x\to 0} \cos x = 1}$)

La funzione t^2 è continua

ESERCIZIO

Calcolare il seguente limite notevole:

$$LN_7)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{dove}\\ \text{ha senso}\end{array}\right)$$

Si ha $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, quindi

$$LN_7) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) =$$

(il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti)

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{proprietà}\\ \text{dei limiti}\end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0}\cos x}\cdot \underbrace{1}_{\text{LIMITE NOTEVOLE}} = \frac{1}{1} = \boxed{1},$$

come volevamo dimostrare.

 Ora proviamo: $\boxed{D(\sin x) = \cos x}$ (ESERCIZIO) per ogni $x \in \mathbb{R}$

A questo scopo, utilizzeremo il limite notevole LN5) $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

Adesso, tenendo conto del limite notevole LN6) $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} = \frac{1}{2}$

proviamo che $\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0}$.

Si ha: $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1-\cos h}{h} \cdot \frac{(-h)}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \left(\left(\frac{1-\cos h}{h^2} \right) \cdot (-h) \right) =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h^2} \cdot \lim_{h\to 0} (-h) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ (il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti).

Adoperiamo la formula DI ADDIZIONE DEL SENO:

$$\boxed{\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h}$$ (v. parte 1, ~~presonso~~ trigonometria)

Si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$D(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} =$$ (il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, e il limite di una costante è uguale alla costante stessa) =

(ossia: la costante moltiplicativa può essere portata fuori dal segno di limite)

$$= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

Quindi $\boxed{D(\sin x) = \cos x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO

Vediamo ora la derivata del coseno

Similmente come nel calcolo della derivata del seno, teniamo conto dei limiti

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1}, \quad \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0}$$

e adoperiamo la formula

$$\boxed{\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h}$$

(v. precorso/parte 1, trigonometria)

Si ha, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$D(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h} =$$

(il limite della somma è uguale alla somma dei limiti, il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti, e il limite di una costante è uguale alla costante stessa) = (ossia: la costante moltiplicativa può essere portata fuori dal segno di limite)

$$= \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$$

$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.$$

Quindi

$$\boxed{D(\cos x) = -\sin x}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO

Vediamo ora la funzione $\boxed{tg\, x}$.

Notiamo che $tg\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

Applicando la formula della derivata del quoziente di due funzioni, otteniamo

$$D(tg\, x) = \frac{[D(\sin x)] \cdot \cos x - \sin x \cdot D(\cos x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$= \frac{1}{\cos^2 x}$. Pertanto, dove ha senso, si ha

$$\boxed{D(tg\, x) = \frac{1}{\cos^2 x}}.$$

ESERCIZIO

Vediamo ora la funzione $\boxed{cotg\, x.}$

Notiamo che $cotg\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$.

Applicando la formula della derivata del quoziente, si ha

$$D(cotg\, x) = \frac{[D(\cos x)] \cdot \sin x - \cos x \cdot D(\sin x)}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Pertanto, dove ha senso, è

$$\boxed{D(cotg\, x) = -\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

ESERCIZIO 165

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Osserviamo, innanzi tutto, che il numeratore tende a 0: infatti $\sin 0 = 0$, e il seno è una funzione continua (in tutto $\mathbb{R}$). Infatti abbiamo visto che il seno è una funzione derivabile in tutto $\mathbb{R}$, e quindi anche continua in tutto $\mathbb{R}$ (se una funzione è derivabile, allora è anche continua, cioè derivabilità implica continuità; ma abbiamo visto che il viceversa non è vero, cioè esistono funzioni continue che non sono derivabili). La continuità di sen x in 0 (ripassiamo!) vuol dire che $\lim_{x \to 0} \sin x = \sin 0$ (che è 0), cioè $\sin x$ tende a $\sin 0$, che è 0. Inoltre, anche il denominatore tende a 0. Quindi si tratta di una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Applichiamo il teorema de l'Hôpital. Si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{D(x - \sin x)}{D(x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{1}{D(x)} - D(\sin x)}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} =$$ (portiamo fuori dal segno di limite la costante moltiplicativa $\frac{1}{3}$) $$= \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{matrix}\text{limite} \\ \text{notevole}\end{matrix}\right) = \frac{1}{6}$$

come si voleva dimostrare.

N.B.: Il limite notevole $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$ può essere dimostrato anche con la regola di de l'Hôpital. Infatti, si ha: (forma $\frac{0}{0}$; $\cos 0 = 1$ il coseno è derivabile e quindi continuo)

$$\lim_{x \to 0} \frac{D(1 - \cos x)}{D(x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{=0}{D(1)} - D(\cos x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{-(-\sin x)}{2x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$ ($\frac{1}{2}$ è stato portato fuori dal segno di limite) $$= \frac{1}{2} \cdot 1 \left(\begin{matrix}\text{limite} \\ \text{notevole}\end{matrix}\right) = \frac{1}{2}$$

Anche il limite notevole LN_5 $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$ può essere provato con de l'Hôpital. Infatti è

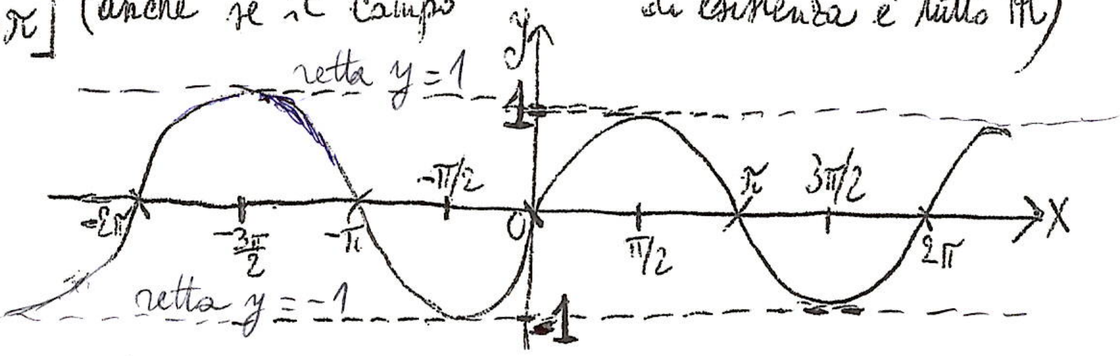
$$LN_5 = \lim_{x \to 0} \frac{D(\sin x)}{D(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \boxed{1}$$

come volevamo dimostrare.

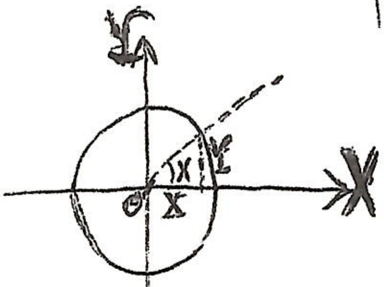
Ora vediamo seno, coseno, tangente, cotangente come studi di funzioni.

Studiamo la funzione $f_1(x) = \sin x$. Questa funzione è periodica di periodo 2π, e quindi la studiamo nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (anche se il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}$) =

CURVA SINUSOIDE (solo come "punto di riferimento"...)



Consideriamo quindi $f_1(x) = \sin x$ <u>come studio di funzione in $[0, 2\pi]$</u>.

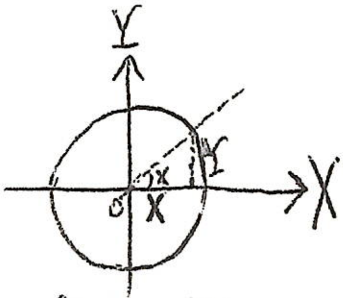


Vediamo dov'è che il seno è positivo e dove il seno è negativo. Adoperiamo il seguente "trucchetto": 1) Disegniamo la circonferenza goniometrica. 2) Facciamo un "cambiamento di coordinate" del tipo $\boxed{X = \cos x,\ Y = \sin x}$. Allora, dalla figura si vede che Y è positivo nei punti del I e del II Quadrante (a cui corrispondono gli angoli $x \in]0, \pi[$), mentre Y è negativo nei punti del III e del IV Quadrante (a cui corrispondono gli angoli $x \in]\pi, 2\pi[$); inoltre Y si annulla sull'asse delle X, su cui ci sono gli angoli $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$. Quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, $\sin x > 0$ se e solo se $0 < x < \pi$; $\sin x < 0$ se e solo se $\pi < x < 2\pi$; $\sin x = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = \pi$ oppure $x = 2\pi$. N.B.: <u>precisazione</u>: noi dobbiamo <u>DIMOSTRARE</u> che il grafico del seno è la sinusoide, quindi <u>NON POSSIAMO</u> <u>DEDURRE</u> gli intervalli dove la funzione seno è positiva o negativa dal grafico della sinusoide, ma ci vuole un'altra tecnica: qui, come tecnica "alternativa", abbiamo usato il "trucchetto" della <u>CIRCONFERENZA GONIOMETRICA</u>!

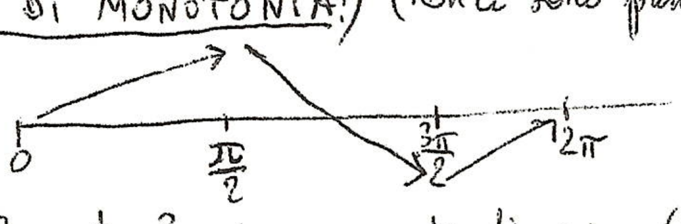
Per quanto riguarda gli asintoti, noi stiamo studiando la funzione f_1 = seno da 0 a 2π, quindi il problema degli asintoti orizzontali e obliqui NON SI PONE. La funzione f_1 è continua in tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$, ESTREMI COMPRESI, quindi non ci possono essere asintoti verticali. Infatti, in virtù della continuità in tutti i punti di $[0, 2\pi]$, si ha che, per ogni $x_0 \in [0, 2\pi]$, $\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$ e quindi non può capitare NESSUNA delle 4 situazioni in cui $\lim_{x \to x_0^+} f_1(x)$ oppure $\lim_{x \to x_0^-} f_1(x)$ sia uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Pertanto la funzione $f_1(x) = \sin x$ non ha asintoti (in $[0, 2\pi]$). [esercizio: Per la cronaca (by the way): se si prende tutta la funzione $\sin x$ definita su tutto $\mathbb{R}$, si ha che $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste, e $\lim_{x \to -\infty} \sin x$ non esiste. Perché? Perché esistono restrizioni che hanno limiti diversi: per esempio la restrizione ai punti del tipo $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi$, cioè ai punti del tipo $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, ha limite zero (perché in quei punti il seno vale 0), mentre la restrizione ai punti del tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, ha limite 1 (perché in quei punti il seno vale 1). Se esistono almeno due restrizioni che hanno limiti diversi, allora il limite globale non esiste.]

Adesso vediamo la derivata prima. La derivata del seno è coseno, quindi $f_1'(x) = \cos x$. Per quanto riguarda la crescenza e la decrescenza, studiamo il segno della derivata, cioè il segno della funzione coseno.

Vediamo dove il coseno è positivo e dove il coseno è negativo. Procediamo come nella valutazione del segno del seno e: 1) disegniamo la circonferenza goniometrica; 2) facciamo il cambio di coordinate del tipo $X = \cos x$, $Y = \sin x$. Dalla figura si vede



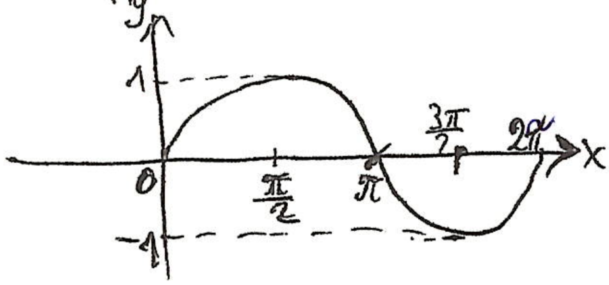
che X è positivo nei punti del I e del IV Quadrante (a cui corrispondono gli angoli $x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$), X è negativo nei punti del II e del III Quadrante (a cui corrispondono gli angoli $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi[$) ed X si annulla sull'asse delle Y, su cui ci sono gli angoli $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.
Quindi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, $\cos x > 0$ se e solo se $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$; $\cos x < 0$ se e solo se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$; $\cos x = 0$ se e solo se $x = \frac{\pi}{2}$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi$ [N.B.: come prima, non dobbiamo dare per scontato il grafico della funzione coseno, perché sostanzialmente lo dobbiamo dimostrare, in quanto, in questa fase, stiamo studiando il seno e il coseno come studio di funzione; per questo abbiamo usato il "trucchetto" della circonferenza goniometrica!]
Da ciò, tenendo conto che $f_1'(x) = \cos x$, otteniamo i seguenti risultati a proposito della crescenza, della decrescenza e dei punti di massimo e minimo: $f_1(x) = \sin x$ è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$; è strettamente decrescente in $[\pi/2, \frac{3\pi}{2}]$, è strettamente crescente in $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ (gli estremi sono inclusi perché così funziona il TEST DI MONOTONIA!) (non ci sono punti "cattivi"...); e quindi



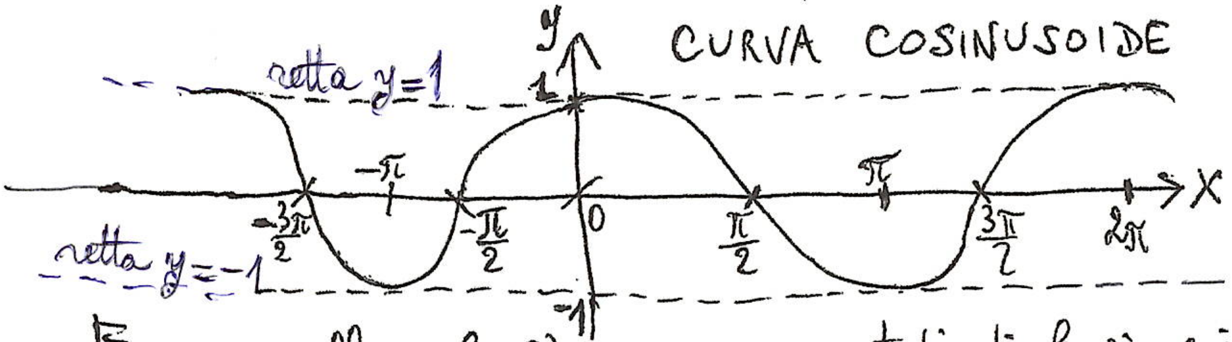
il punto $\frac{\pi}{2}$ è un punto di massimo (che sarà assoluto), mentre il punto $\frac{3}{2}\pi$ è un punto di minimo (che sarà assoluto).

Ora vediamo la derivata seconda di $f_1(x) = \sin x$. Si ha: $f'_1(x) = \cos x$, e quindi $f''_1(x) = D(f'_1(x))$ (la derivata seconda è la derivata della derivata) $= D(\cos x) = -\sin x$. Quindi il segno di f''_1 sarà l'opposto del segno di f_1, e pertanto, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, $f''_1(x) = -\sin x > 0$ se e solo se $\sin x < 0$ se e solo se $\pi < x < 2\pi$; $-\sin x = 0$ se e solo se $\sin x = 0$ se e solo se $x = 0$ oppure $x = \pi$ oppure $x = 2\pi$; $-\sin x < 0$ se e solo se $\sin x > 0$ se e solo se $0 < x < \pi$. Pertanto $f_1(x) = \sin x$ è convessa in $[\pi, 2\pi]$ e concava in $[0, \pi]$ (ricordiamo che "convessa" vuol dire "rivolge la concavità verso l'alto" e che "concava" vuol dire "rivolge la concavità verso il basso"). Il punto π è un punto di flesso, perché f_1 prima di π è concava e dopo π è convessa (c'è il cambio di concavità). [N.B.: Per la cronaca, tenendo conto della periodicità di f_1, si può vedere dal grafico che anche i punti 0 e 2π saranno punti di flesso, quando si considera f_1 anche a sinistra del punto 0 e a destra del punto 2π]

Si ottiene quindi un pezzo della curva "sinusoide". Abbiamo considerato la funzione seno come studio di funzione.



Studiamo la funzione $f_2(x) = \cos x$. Questa funzione è periodica di periodo 2π, e pertanto la studiamo nell'intervallo $[0, 2\pi]$ (anche se il campo di esistenza è tutto $\mathbb{R}$).



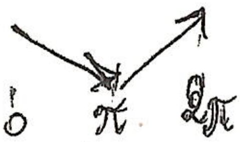
Facciamo allora $f_2(x) = \cos x$ come studio di funzione in $[0, 2\pi]$.
Quando abbiamo studiato la funzione $f_1(x) = \sin x$, abbiamo studiato il segno della funzione coseno (perché il coseno è la derivata del seno) e abbiamo visto che, in $[0, 2\pi]$, $\cos x > 0$ se e solo se $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$; $\cos x < 0$ se e solo se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; $\cos x = 0$ se e solo se $x = \frac{\pi}{2}$ oppure $x = \frac{3}{2}\pi$ (guardando la circonferenza goniometrica).
Per quanto riguarda gli asintoti, noi stiamo studiando la funzione coseno da 0 a 2π, quindi il problema degli asintoti orizzontali e obliqui non si pone. Inoltre la funzione coseno è continua in tutto l'intervallo $[0, 2\pi]$, ESTREMI COMPRESI, quindi non ci sono asintoti verticali (vale lo stesso ragionamento che era stato fatto per il seno). Quindi la funzione $f_2(x) = \cos x$ non ha asintoti (in $[0, 2\pi]$). [Si può vedere anche (esercizio) che $\lim_{x \to +\infty} \cos x$ non esiste, e $\lim_{x \to -\infty} \cos x$ non esiste, perché ci sono restrizioni che hanno limiti diversi: per esempio la restrizione costituita dai punti del tipo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, avrà limite 1 (il coseno in quei punti vale 1), mentre quella costituita dai punti del tipo $\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, avrà limite -1 (il coseno vale -1)].

Vediamo ora la derivata prima di $f_2(x) = \cos x$. Si ha: $f_2'(x) = -\sin x$. Abbiamo già studiato la funzione $f_1(x) = \sin x$, e quindi il segno di $-\sin x$ si deduce dal segno di $\sin x$ passando all'opposto. Dunque, in $[0, 2\pi]$,

$-\sin x > 0$ se e solo se $\sin x < 0$ se e solo se $\pi < x < 2\pi$;

$-\sin x < 0$ se e solo se $\sin x > 0$ se e solo se $0 < x < \pi$

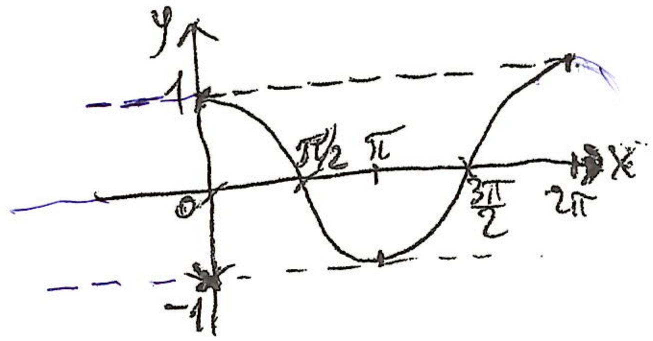
Pertanto la nostra funzione coseno è strettamente crescente in $[\pi, 2\pi]$ e strettamente decrescente in $[0, \pi]$ (per il test di monotonia). Quindi il punto π è un punto di minimo (che è anche minimo assoluto).



N.B.: il test di monotonia ci dice che, nel caso della stretta crescenza o stretta decrescenza, gli estremi sono compresi (e nel nostro caso non ci sono punti "cattivi").

Ora vediamo la derivata seconda di $f_2(x)=\cos x$, cioè la derivata della derivata. Questa quantità è uguale alla derivata di $-\sin x$, che è $-\cos x$.

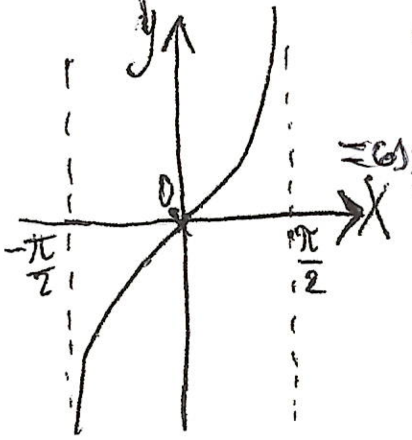
Quindi $f_2''(x) = -\cos x > 0$ se e solo se $\cos x < 0$ se e solo se $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$; $-\cos x = 0$ se e solo se $\cos x = 0$ se e solo se $x = \frac{\pi}{2}$ oppure $x = \frac{3\pi}{2}$; $-\cos x < 0$ se e solo se $\cos x > 0$ se e solo se $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi$. Pertanto $f_2(x) = \cos x$ è concava in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; convessa in $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$; concava in $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ("concava" vuol dire che la concavità è verso il basso (∩), mentre "convessa" significa che la concavità è verso l'alto (∪)). I punti $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ sono punti di flesso: infatti subito prima di $\frac{\pi}{2}$ la funzione coseno è concava e subito dopo è convessa, e subito prima di $\frac{3\pi}{2}$ la funzione coseno è convessa e subito dopo $\frac{3\pi}{2}$ la funzione coseno è concava.



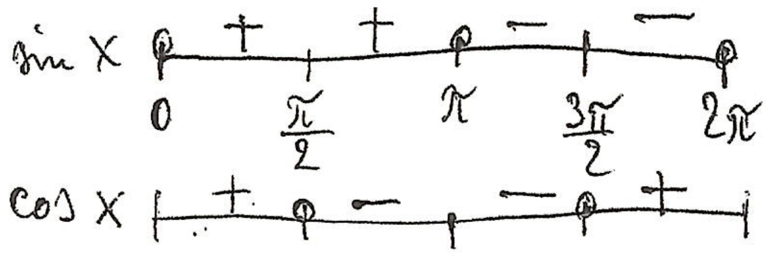
Si ottiene dunque un pezzo della curva "cosinusoide".

Abbiamo considerato la funzione <u>coseno</u> come <u>studio di funzione</u>.

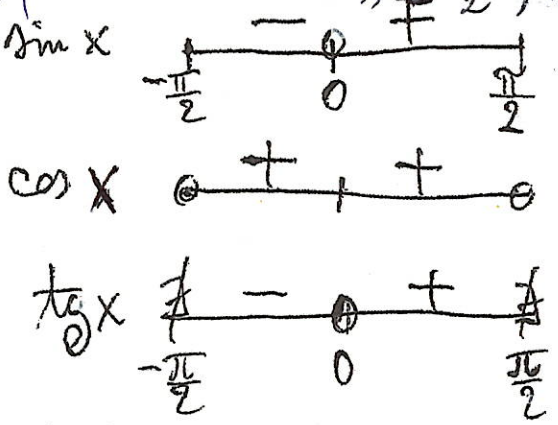
Ora vediamo, come studio di funzione, $f_3(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: la studiamo tra $-\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\pi}{2}$, essendo una funzione periodica di periodo π. Vediamo dove $\operatorname{tg} x > 0$, dove $\operatorname{tg} x < 0$ e per quali valori di x abbiamo che $\operatorname{tg} x = 0$.



Nello studio della funzione $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$ abbiamo visto che



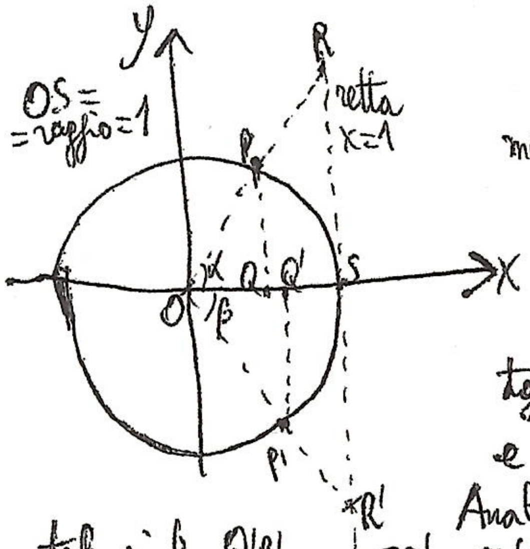
e tenendo conto della periodicità di periodo 2π, si ottiene (cioè, quando si "sostituisce" $]\frac{3}{2}\pi, 2\pi[$ con $]-\frac{\pi}{2}, 0[$):



e, per la regola dei segni,

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x < 0 \text{ per } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \\ \operatorname{tg} x = 0 \text{ se e solo se } x = 0, \\ \operatorname{tg} x > 0 \text{ per } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \end{array}}$$

Questo lo possiamo vedere anche con la circonferenza goniometrica. Nella figura, l'angolo α è un qualsiasi angolo appartenente a $]0, \frac{\pi}{2}[$ mentre l'angolo β è un qualunque angolo che si trova in $]-\frac{\pi}{2}, 0[$.



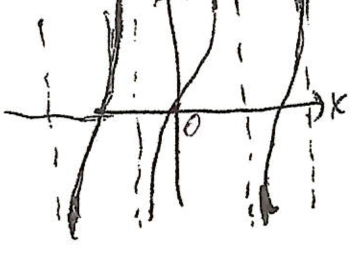
I triangoli POQ ed ROS sono simili perché hanno i tre angoli uguali (α, $\frac{\pi}{2} = 90°$ e il terzo, $\frac{\pi}{2} - \alpha$) per differenza). Quindi i lati sono in proporzione. Si ha:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{SR}{OS} = SR$ (considerato nel verso positivo) e viene $\operatorname{tg}\alpha > 0$ (sia il seno sia il coseno sono positivi).

Analogamente, prendendo i triangoli simili $OQ'P'$ e OSR', si ha

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{Q'P'}{OQ'} = \dfrac{SR'}{OS} = SR'$ (orientato nel verso negativo, perché il coseno OQ' è positivo, ma il seno $Q'P'$ è negativo). Dunque $\operatorname{tg}\beta < 0$. Infine, $\boxed{\operatorname{tg} 0} = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = \boxed{0}$. Il punto $(0,0)$ è l'unica intersezione del grafico di f_3 con gli assi coordinati.

Vediamo ora gli asintoti. Sempre analizzando la figura precedente con la circonferenza goniometrica, si vede che, quando α si avvicina a $\frac{\pi}{2} = 90°$ (dalla sinistra), il segmento SR, considerato con il verso POSITIVO (cioè da S a R), tende a diventare sempre più lungo, diciamo "di lunghezza infinita", quindi $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg\, x = +\infty$. Inoltre, quando β si avvicina a $-\frac{\pi}{2} = -90°$ (dalla destra, quindi per valori più grandi di $-90°$, per esempio $-88°, -89°, \ldots$), il segmento SR', considerato con il verso NEGATIVO (cioè da S a R'), tende a diventare sempre più lungo, "di lunghezza infinita", ma questa volta con il segno meno: dunque $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} tg\, x = -\infty$. Pertanto la retta $x = \frac{\pi}{2}$ è un ASINTOTO VERTICALE per $f_3(x) = tg\, x$ (dal lato sinistro) e la retta $x = -\frac{\pi}{2}$ è un ASINTOTO VERTICALE per f_3 (dal lato destro). Siccome abbiamo considerato la nostra funzione f_3 definita in $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, allora non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui, perché non ha senso considerare i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$. Tra l'altro, se si considerasse la funzione "globalmente", a causa della periodicità (di periodo π) si potrebbe vedere (analogamente come per il seno e per il coseno) che ci sono restrizioni della funzione tangente aventi limiti diversi, man mano che ci si avvicina a $+\infty$



oppure a $-\infty$, e dunque il limite della funzione tangente (considerata con tutti i suoi "rami") al tendere di x a $+\infty$ (o a $-\infty$) non esiste.

Vediamo ora la derivata prima.

Si ha $f_3'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} > 0$ per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pertanto f_3 è <u>strettamente crescente</u> in $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ed f_3 non ha punti né di massimo né di minimo.

Studiamo adesso la derivata seconda, cioè la derivata della derivata (prima). Si ha, per ogni $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$: $f_3''(x) =$

$$= D\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{\boxed{D(1)}\cdot\cos^2 x - 1\cdot D(\cos^2 x)}{\cos^4 x} =$$

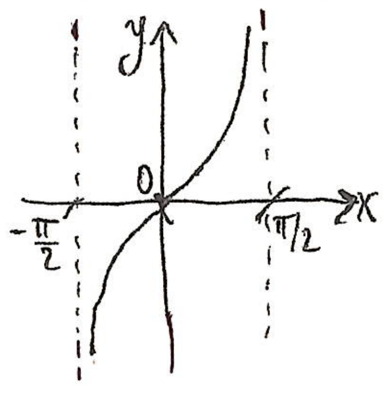
$$= -\frac{D(\cos^2 x)}{\cos^4 x} = \cdots$$

$D(\cos^2 x) = \ldots$ $\quad w = \boxed{\cos x}$, $\cos^2 w = \boxed{w^2}$

$\ldots D(w^2)\cdot D(\cos x) = 2w(-\sin x) =$
$= -2\sin x\cos x = -\sin(2x)$ (funzione COMPOSTA)

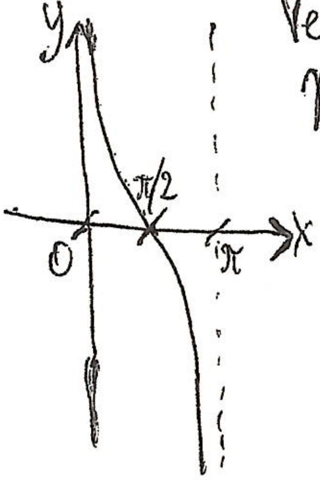
$$\cdots = \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x}.$$

Quindi (per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$) si ha: $f_3''(x) > 0$ $(=0, <0)$ se e solo se $\sin(2x) > 0$ $(=0, <0)$. Quindi, per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si ha $0 < 2x < \pi$, e quindi $\sin(2x) > 0$; nel punto 0 si ha $\sin(2x) = \sin 0 = 0$, mentre per $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ si ha $-\pi < 2x < 0$, e quindi $\sin(2x) < 0$. Pertanto f_3 è convessa in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ (cioè rivolge la concavità verso l'alto), è concava (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, e il punto 0 è un punto di flesso (c'è un cambio di concavità).



Ecco quindi $f_3(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ come studio di funzione.

Ora vediamo, come studio di funzione, $f_4(x) = \text{cotg}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$:
la studiamo tra 0 e π, essendo una funzione periodica di periodo π.



Vediamo il segno della funzione f_4 e le intersezioni con gli assi.
Nello studio della funzione $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, si ha che

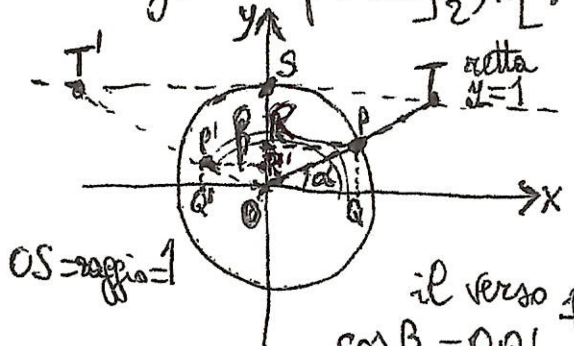
$\cos x$: 0 — $+$ — $\pi/2$ (0) — $-$ — π

$\sin x$: 0 (0) — $+$ — $\pi/2$ — $+$ — π (0)

e quindi

$\text{cotg}\, x$: 0 (non definita) — $+$ — $\pi/2$ (0) — $-$ — π (non definita)

cioè: $\text{cotg}\, x > 0$ per $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
$\text{cotg}\, x = 0$ se e solo se $x = \frac{\pi}{2}$,
$\text{cotg}\, x < 0$ per $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$. Questo lo vediamo anche attraverso la circonferenza goniometrica.



Nella figura, α è un qualunque angolo appartenente a $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ (angolo <u>acuto</u>), β è un qualunque angolo che si trova in $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ (angolo ottuso). Notiamo che $\cos\alpha = OQ = RP$ (con il verso <u>positivo</u>), $\sin\alpha = PQ = OR$ (con il verso <u>positivo</u>), $\cos\beta = OQ' = R'P'$ (con il verso <u>negativo</u>), $\sin\beta = OR' = Q'P'$ (con il verso positivo) (diciamo che il seno corrisponde alla quota y (ordinata), mentre il coseno corrisponde alla quota x (ascissa)). Si ha:

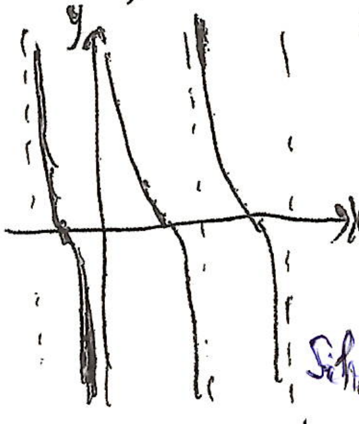
$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{RP}{OR} = \frac{ST}{OS} = \frac{ST}{1} = ST,$$

perché i triangoli rettangoli ORP ed OST sono simili, aventi gli angoli uguali, e quindi i lati in proporzione, e pertanto $\text{cotg}\,\alpha > 0$ (il seno e il coseno sono entrambi positivi). Analogamente, considerando i triangoli simili OP'R' (R', nella figura, sta fra R ed O), si ha:

$$\text{cotg}\,\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{OQ'}{OR'} = \frac{R'P'}{OR'} = \frac{ST'}{OS} = \frac{ST'}{1} = ST'$$

(orientato nel verso negativo, perché il seno è positivo, ma il coseno è negativo). Quindi $\text{cotg}\,\beta < 0$. Inoltre, $\text{cotg}\,\frac{\pi}{2} = \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{1} = 0$. Il punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ è l'<u>unica</u> intersezione del grafico di f_4 con gli assi coordinati (la funzione f_4 <u>non è definita</u> in 0, e dunque non ci sono intersezioni con l'asse delle y).

Vediamo ora gli asintoti di f_4. Dalla figura precedente con la circonferenza goniometrica, si vede che, quando α si avvicina a 0 (dalla destra) il segmento ST, considerato con il verso POSITIVO (cioè da S a T), tende a diventare "di lunghezza infinita": quindi $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{cotg} x = +\infty$.
Inoltre, quando l'angolo β si avvicina a π ($=180°$) dalla sinistra, il segmento ST', considerato con il verso negativo (cioè da S a T') tende a diventare "di lunghezza infinita", ma questa volta con segno negativo; quindi $\lim_{x \to \pi^-} \operatorname{cotg} x = -\infty$. Pertanto le rette $x=0$ (cioè l'asse y) ed $x=\pi$ sono i due asintoti verticali per $f_4(x) = \operatorname{cotg} x$ (rispettivamente dal lato destro e dal lato sinistro). Siccome abbiamo considerato f_4 definita in $]0,\pi[$, allora non esistono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui, in quanto non ha senso considerare i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.
Tra l'altro, se si considerasse la funzione "globalmente", a causa della periodicità (di periodo π) si potrebbe vedere (come per il seno e il coseno) che esistono restrizioni della funzione cotangente aventi limiti diversi, man mano che ci si avvicina a $+\infty$ oppure a $-\infty$, e quindi



il limite della funzione cotangente (considerata con tutti i suoi "rami") al tendere di x a $+\infty$ (o a $-\infty$) non esiste.
Vediamo ora la derivata prima di f_4.

Si ha $f_4'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} < 0$ per ogni $x \in]0,\pi[$. Pertanto f_4 è <u>strettamente decrescente</u> in $]0,\pi[$ ed f_4 non ha punti né di massimo né di minimo.

Vediamo ora la derivata seconda di $f_4(x) = \cot g\, x$. Si ha, per ogni $x \in]0, \pi[$:

$$f_4''(x) = D\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = D\left(\frac{-1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\overbrace{[D(-1)]}^{0}\cdot \sin^2 x - (-1)\cdot D(\sin^2 x)}{\sin^4 x} =$$

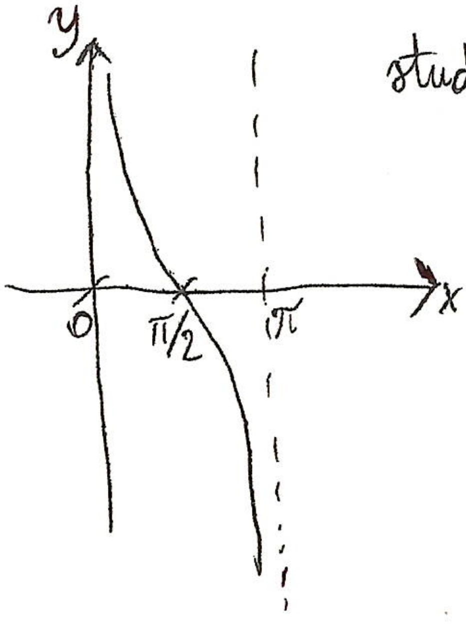
$$= \frac{D(\sin^2 x)}{\sin^4 x} = \frac{\sin(2x)}{\sin^4 x}$$

$\boxed{w = \sin x \quad \sin^2 x = w^2}$

$D \sin^2 x = D(w^2)\cdot D(\sin x) = 2w \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ (FUNZIONE COMPOSTA)

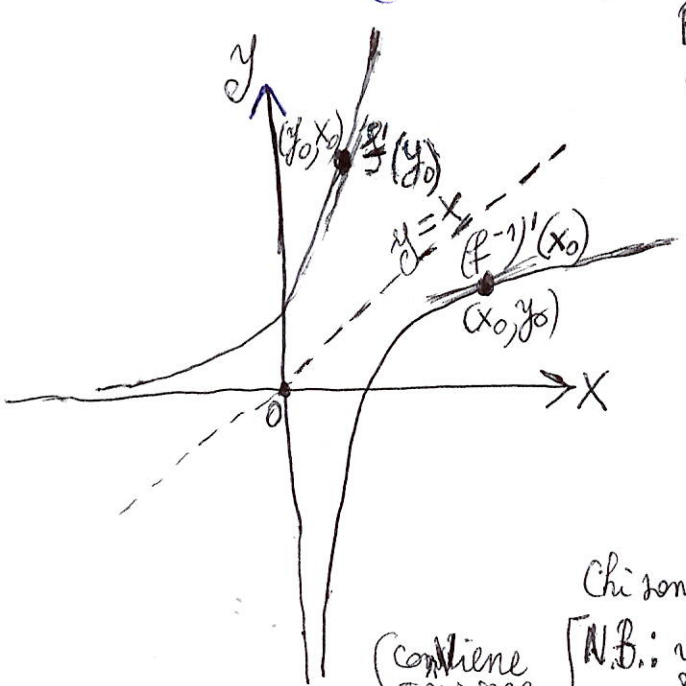
Quindi, per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si ha $0 < 2x < \pi$, e quindi $\sin(2x) > 0$; nel punto $\frac{\pi}{2}$ si ha $2x = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi$ e quindi $\sin(2x) = \sin \pi = 0$; per $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, si ha $\pi < 2x < 2\pi$, e quindi $\sin(2x) < 0$.

Pertanto f_4 è convessa (cioè rivolge la concavità verso l'alto) ($\cup$) in $]0, \frac{\pi}{2}]$, è concava (cioè rivolge la concavità verso il basso) in $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ ($\cap$), e il punto $\frac{\pi}{2}$ è un punto di flesso (c'è un cambio di concavità). Abbiamo quindi studiato la cotangente in $]0, \pi[$ come studio di funzione.



IMPORTANTISSIMO

DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE (APPROCCIO "GEOMETRICO")



RISULTATO DA VEDERE: "La derivata della funzione inversa è il reciproco della derivata della funzione di partenza" (dove ha senso)

$$\boxed{(f^{-1})'(x_0)=\frac{1}{f'(y_0)}}$$

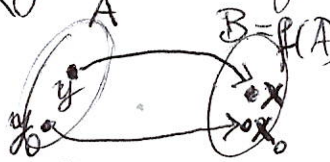
ovvero, negli esempi,

$$\boxed{(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}}$$

(quando la lettera x non è più usata per indicare che x tende a x_0, vedi come nella def. di derivata "con gli h")

Chi sono x, y, x_0 ed y_0?

(conviene scrivere così...) [N.B.: $y=f^{-1}(x)$ $\quad x=f(y)$
$y_0=f^{-1}(x_0)$ $\quad x_0=f(y_0)$]

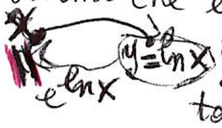


[N.B.: Le nostre funzioni f ed f^{-1} risultano essere CONTINUE]

Esempio: $A=\mathbb{R}$, $B=]0,+\infty[$ $x=f(y)=e^y$, $\boxed{y=f^{-1}(x)}=\ln x$, $f'(y)=e^y$. Si ha:

$$D(\ln x)=\frac{1}{D(e^y)}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{e^{\ln x}}=\frac{1}{x}$$

. Perché? Quando abbiamo l'espressione in y, dobbiamo tornare alla x (chi era y? $y=\ln x$), COME NELLA DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. Inoltre osserviamo che $e^{\ln x}=x$ perché e^y et $\ln x$ sono l'una la funzione inversa dell'altra.



Si parte da x, si torna a x.

$$(f^{-1})'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)}=\overset{(*)}{\ldots}$$

(Quando x tende a x_0, allora y tende a y_0, cioè $f^{-1}(x)$ tende a $f^{-1}(x_0)$, perché f^{-1} è CONTINUA; inoltre, quando y tende a y_0, allora x tende a x_0, ossia $f(y)$ tende a $f(y_0)$, perché f è CONTINUA)

$$\overset{(*)}{\ldots}=\frac{1}{\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}}\ \left(\begin{matrix}\text{dove}\\ \text{ha}\\ \text{senso}\end{matrix}\right)=\frac{1}{f'(y_0)}$$

$\boxed{180}$ $\boxed{NEW}$ Parte 2 testo adottato

(DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE)

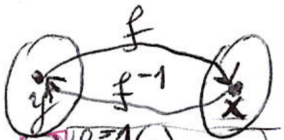
Le derivate delle funzioni inverse si possono ricavare anche dalle derivate delle funzioni composte, la cui formula è

$$(\square) \qquad \boxed{D(f \circ w)(x) = f'(w(x)) \cdot w'(x)}$$

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo o una semiretta o tutto $\mathbb{R}$, e sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione biiettiva e derivabile, con derivata mai uguale a 0. Si può vedere (senza dimostrazione) che il codominio di f (cioè $f(I)$) è un intervallo o semiretta o tutto $\mathbb{R}$. Quindi $f: I \to f(I)$, $f^{-1}: f(I) \to I$, pertanto ha senso considerare la derivata di f^{-1} (v. defin. di derivata) proprio perché $f(I)$ è intervallo o semiretta o tutto $\mathbb{R}$. Ora ricordiamo che la funzione inversa ha la proprietà che

$$(\nabla) \qquad \boxed{f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{per ogni } x \in f(I)}$$

cioè $\boxed{(\nabla)}$ $\boxed{(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \text{per ogni } x \in f(I)}$



$\boxed{(\cdot)}$ $\boxed{f^{-1}(x) = y}$

$f(y) = x$

(NOTAZIONE)

Esempio $tg: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $arctg: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (abbiamo visto) si ha: $tg(arctg\, x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

[N.B.: l'arcotangente è la funzione INVERSA della tangente. Invece la cotangente è la funzione RECIPROCA della tangente.]

La formula $(\square)$, se al posto di w ci mettiamo f^{-1}, diventa

$$D(f \circ f^{-1})(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$$

che, tenuto conto di $(\nabla)(\cdot)$, diventa

$$\boxed{1} = D(x) = D(f \circ f^{-1})(x) = \boxed{f'(y) \cdot (f^{-1})'(x)}$$

Quindi, se conosciamo $f'(y)$, si ha

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}}, \text{ cioè } \boxed{D(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(y)}}.$$

Quindi, detto con parole "molto semplici", la derivata della funzione inversa è il reciproco della derivata della funzione di partenza (quando ha senso)

$D(\arcsin x) = \dfrac{1}{D(\sin y)}$ $\quad D(\arccos x) = \dfrac{1}{D(\cos y)}$ $\quad D(arctg\, x) = \dfrac{1}{D(tg\, y)}$ $\quad \boxed{D(arccotg\, x) = \dfrac{1}{D(cotg\, y)}}$